Quelques problèmes relatifs à la dynamique des points vortex dans les équations d'Euler et de Ginzburg-Landau complexe

Evelyne Miot

Université Pierre et Marie Curie – Paris 6 **Laboratoire Jacques-Louis Lions – UMR 7598**

Quelques problèmes relatifs à la dynamique des points vortex dans les équations d'Euler et de Ginzburg-Landau complexe

Thèse de Doctorat

présentée et soutenue publiquement le 4 décembre 2009

pour l'obtention du

Doctorat de l'université Pierre et Marie Curie – Paris 6

Spécialité Mathématiques Appliquées

par

Evelyne MIOT

Composition du jury

Rapporteurs :	Thierry GALLAY	
	Robert L. JERRARD	
Examinateurs :	Didier SMETS	Directeur de thèse
	Fabrice BETHUEL	
	Patrick GERARD	
	Mario PULVIRENTI	
	Sylvia SERFATY	
	Michel WILLEM	

École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre **UFR 929 - Mathématiques**

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance envers Didier Smets qui m'a guidée, encouragée et soutenue d'un bout à l'autre de ma thèse. Il m'a proposé des sujets de recherche aussi variés que passionnants. Il a veillé à mon apprentissage en m'envoyant à de nombreux séminaires et conférences. Il m'a apporté force conseils et patientes explications. Je le remercie pour sa constante bonne humeur, sa décontraction, sa gentillesse et sa disponibilité ; et d'avoir enduré mes erreurs et autres divagations mathématiques avec autant d'indulgence. J'aurai toujours la plus grande admiration pour son savoir et son sens de l'humour !

Je remercie très chaleureusement Robert Jerrard et Thierry Gallay d'avoir accepté le rôle de rapporteurs. Par leur lecture extrêmement attentive et de nombreux commentaires, ils ont amplement contribué à l'amélioration de ce manuscrit.

C'est un grand honneur pour moi, et je suis très heureuse, que Sylvia Serfaty, Fabrice Bethuel, Patrick Gérard, Mario Pulvirenti et Michel Willem constituent le jury de la soutenance. Je leur adresse mes plus vifs remerciements.

Pendant ma thèse, j'ai eu l'occasion et le plaisir de travailler avec Helena N. Lopes et Milton L. Filho ; qu'ils en soient ici remerciés. Avec Christophe Lacave ; un grand merci, ainsi qu'à Dragos Iftimie pour son aide à cette occasion. Je suis extrêmement reconnaissante à Radu Ignat pour son soutien depuis le premier jour de ma thèse et de fructueuses (en ce qui me concerne !) et sympathiques séances de maths en 3D23. Je sais gré à tous les mathématiciens[1] qui, de près ou de loin, m'ont prêté une oreille attentive et un peu de leur temps pour répondre à mes questions, m'éclairer, ou tout simplement m'encourager. Je pense notamment à Franck Sueur, Olivier Glass, Laurent Boudin, Nicolas Seguin et Nicolas Vauchelet, et tout autant à Valeria Banica, Vincent Millot, Benoît Pausader, Thomas Duyckaerts et Ramona Anton ; à Frédéric Coquel et Jean-Yves Chemin pour leur bienveillance ; à Frédéric Lagoutière pour tous ses conseils. J'ai eu la chance extraordinaire de travailler dans un environnement aussi stimulant que convivial et je remercie collectivement tous les membres du Laboratoire Jacques-Louis Lions pour des échanges mathématiques, footballistiques et culinaires de premier ordre. Je remercie en particulier Yvon Maday et Edwige Godlewski, et n'oublie pas que c'est aussi grâce à leur soutien que j'ai la chance d'effectuer un post-doc en Italie. Merci enfin à Liliane Ruprecht, Danièle Boulic, Salima, Florence et Khashayar pour leur efficacité, leur gentillesse et leur aide.

Il va de soi que ma gratitude s'adresse également aux thésards et post-docs, anciens et plus jeunes, qui ont contribué à rendre mon séjour au labo des plus agréables ! Merci à Filipa, Térence, Ulrich, Driss et Angélique ; à l'énergique Alexis et la pétillante Marianne pour la bonne humeur qu'elles ont apportée ; à Jean-Marie, la force tranquille de mon bureau ; à Nicolas qui dirige le GTT avec poigne. Grazie mille au flegmatique Giacomo ; à Juliette pour les pauses cafés ; à Pierre, Mouna, Nicolas, Thomas, Rachida, Matthieu, Sepideh, Cuc, les deux Benjamin, Joëlle, Paulo, Étienne... à Maya pour une robe de soirée et de grands moments d'amitié. Et, du fond du cœur, à Alexandra et Mathieu pour avoir partagé avec moi vicissitudes, appréhensions, péripéties et moments d'enthousiasme de la thèse de A à Z.

Et comme il n'y a pas que les maths dans la vie, je ne saurais oublier mes autres amis. Par ordre d'apparition, il y a les Antoniens, dont Carole et Claire qui me supportent

[1] Autres que les thésards de Chevaleret auxquels le prochain paragraphe est tout spécialement dédié...

depuis la sixième, l'inénarrable Laurent et Vincent l'évanescent[2]. Je remercie les facétieux et hyperactifs Lyonnais[3], tout spécialement Hélène, Ameline, Rémi, Francine, Cédric, sans compter les joyeux drilles d'Écosse et mes indulgentes colocataires Anne et Estelle, pour les expéditions en tout genre et leur précieuse amitié. Merci à cette chère Marie pour les moments studieux et des virées de toute beauté. À la troupe déjantée du Sentiero qui a embelli ma réintégration parisienne, avec une pensée très affectueuse à Clément. Je remercie infiniment, et malgré leur fichu caractère, mes chers et fins acolytes d'Ailefroide Claire, Greg et Jeff.

Mes derniers mots de remerciements vont à mes parents, pour leur soutien et affection inconditionnels ; au malicieux Olivier et à Sylvain, le fier grimpeur, pour des années de twingo partagée et de complicité. À Claire enfin, pour les café-cigarette rue Louis Morard et tout le reste. Je lui ai tant parlé de ma thèse qu'elle aurait pu la soutenir à ma place, aussi la lui dédié-je !

[2]Qui a pourtant récemment refait surface de la manière la plus inattendue.
[3]Et assimilés.

Table des matières

Introduction générale **1**

1 Le système mixte Euler-points vortex. 3

1.1 Présentation générale. 3

1.2 Lien entre les formulations eulérienne et lagrangienne. 7

1.3 Unicité pour le système Euler-points vortex. 9

1.4 À propos de l'évolution en temps grand du support du tourbillon. 10

1.5 Nappes de tourbillon et points vortex. 11

2 L'équation de Ginzburg-Landau complexe. 13

2.1 Le cadre bidimensionnel et la transformation de Madelung. . . . 13

2.2 Existence globale dans l'espace d'énergie finie. 14

2.3 Dynamique des vortex pour l'équation de Ginzburg-Landau complexe en dimension deux. 15

2.4 Dynamique des ondes amorties pour l'équation de Ginzburg-Landau complexe. 21

I Le système mixte Euler-points vortex **25**

1 Solutions lagrangiennes et solutions eulériennes **27**

1.1 Introduction. 28

1.2 Quelques propriétés du noyau de Biot-Savart. 30

1.2.1 À propos du noyau de Biot-Savart. 31

1.2.2 Propriétés de la convolution par le noyau de Biot-Savart. 31

1.3 Démonstration du Théorème 1.1. 32

1.4 Démonstration du Théorème 1.2. 34

1.4.1 Propriété de renormalisation. 34

1.4.2 Fin de la démonstration du Théorème 1.2. 38

2 Unicité pour le système Euler-points vortex **41**
2.1 Introduction. 42
2.2 La vorticité reste constante autour des points vortex. 43
2.3 Une approche eulérienne. 46
2.3.1 Formulation pour le champ de vitesse. 46
2.3.2 Une inégalité de Gronwall. 49
2.4 Une approche lagrangienne. 55

3 Évolution du support du tourbillon dans le système mixte **59**
3.1 Introduction. 60
3.2 Quelques résultats préliminaires. 62
3.2.1 Conservation. 62
3.2.2 Bornes sur le moment d'inertie et le point vortex. 63
3.3 Démonstration des Propositions 3.1 et 3.2. 64
3.3.1 Démonstration de la Proposition 3.1. 64
3.3.2 Démonstration de la Proposition 3.2. 65
3.4 Commentaires et extensions. 76
3.4.1 Le cas de plusieurs points vortex. 76
3.4.2 Le cas de $\omega_0 \in L^1 \cap L^p$, $p > 2$. 77

4 Nappes de tourbillon et points vortex **79**
4.1 Introduction. 80
4.2 Démonstration du Théorème 4.1. 81

II Une équation de Ginzburg-Landau complexe **89**

5 Problème de Cauchy **91**
5.1 Introduction. 92
5.1.1 Résultats connus pour l'équation de Ginzburg-Landau complexe. 92
5.1.2 L'espace d'énergie associé à l'équation (CGL). 94
5.1.3 Le cas spécifique de la dimension deux et des données de type vortex. 95
5.2 Démonstration du Théorème 5.3. 96
5.2.1 Quelques notations et résultats préliminaires. 96
5.2.2 Existence globale et unicité pour une équation approchée de (CGL). 100
5.2.3 Compacité, convergence et démonstration du Théorème 5.3. . . . 106

5.3 Démonstration du Théorème 5.5. 108

6 Dynamique des points vortex pour $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$ **115**

6.1 Introduction. 116

6.1.1 Énergie renormalisée et problème de Cauchy. 117

6.1.2 Énoncé des résultats. 118

6.2 Quelques définitions et résultats connus à propos de l'énergie et de la vorticité. 119

6.2.1 Notations préliminaires. 120

6.2.2 La formule de Pohozaev. 121

6.3 Formules d'évolution pour l'énergie et la vorticité. 122

6.4 Quelques résultats sur l'énergie renormalisée. 124

6.4.1 Énergie à l'infini et degré topologique à l'infini. 124

6.4.2 Formules explicites pour l'énergie de u_ε^*. 127

6.5 Propriété de coercivité pour l'énergie renormalisée. 128

6.6 Convergence vers des trajectoires lipschitziennes. 130

6.7 Démonstration du Théorème 6.1. 139

7 Dynamique des ondes amorties pour (GLC) **145**

7.1 Introduction. 146

7.2 Le problème de Cauchy pour $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$. 153

7.3 Démonstration des Propositions 7.1, 7.2 et 7.3. 155

7.3.1 Notations. 155

7.3.2 Démonstration de la Proposition 7.1. 155

7.3.3 Démonstration de la Proposition 7.2. 157

7.3.4 Démonstration de la Proposition 7.3. 161

7.4 Démonstration de la Proposition 7.4. 162

7.4.1 Quelques notations et résultats préliminaires. 162

7.4.2 Démonstration de la Proposition 7.4. 165

7.5 Démonstration des Théorèmes 7.1 et 7.3. 171

7.5.1 Démonstration du Théorème 7.1. 171

7.5.2 Démonstration du Théorème 7.3. 173

7.6 Annexe. 176

7.6.1 Quelques estimations paraboliques et autres outils utiles. 176

7.6.2 Démonstration du Lemme 7.2. 178

Bibliographie **181**

Résumé/Abstract **187**

Introduction générale

Cette thèse porte sur des problèmes issus de la dynamique des points vortex pour les fluides ou les superfluides. Nous étudierons d'une part l'équation d'Euler pour les fluides parfaits incompressibles

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla p, \quad \operatorname{div} u = 0$$

et d'autre part l'équation de Ginzburg-Landau complexe

$$(\kappa + i)\partial_t u = \Delta u + u(1 - |u|^2)$$

avec $\kappa \geq 0$, plus communément nommée équation de Gross-Pitaevskii lorsque $\kappa = 0$. Dans les deux cas, $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.

Pour chacune de ces équations, dont nous verrons qu'elles présentent de nombreuses analogies, nous nous focaliserons principalement sur des régimes où le champ u comporte, directement ou dans une asymptotique à petit paramètre, des singularités appelées points vortex. La présence de ces points vortex sera décelée par la *vorticité*, définie par $\omega = \operatorname{rot} u$ pour les fluides et par $\omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot}(u \times \nabla u)$ pour les superfluides. Dans ces régimes, la vorticité est proche, en un sens plus ou moins fort, d'une somme finie de masses de Dirac

$$\omega(t) \simeq \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{z_i(t)},$$

affectées de coefficients d_i appelés intensités ou degrés suivant les cas, ou de la superposition d'une telle configuration avec une partie plus régulière

$$\omega(t) \simeq \sum_{k=1}^{l} d_i \delta_{z_i(t)} + \omega_{\text{reg}}(t).$$

L'une des questions abordées consiste en la justification de l'existence d'un système limite pour les points vortex $z_i(t)$ ainsi que pour la partie régulière $\omega_{\text{reg}}(t)$, l'autre en l'analyse de ce système limite.

Ce mémoire comprend deux parties. Dans la première, résumée par la Section 1 ci-après, on étudiera directement un système limite pour l'équation d'Euler, appelé système mixte Euler-points vortex. Dans la seconde partie, décrite par la Section 2 de cette introduction, on justifiera l'existence d'un système limite pour l'équation de Ginzburg-Landau complexe dans le cas où $\omega_{\text{reg}} \equiv 0$, puis on tentera une étude préparatoire pour autoriser des données moins préparées.

1 Le système mixte Euler-points vortex.

1.1 Présentation générale.

Les équations d'Euler dans le plan. Considérons un fluide parfait incompressible occupant le plan $\mathbb{R}^2$ et dont l'évolution est décrite par l'équation d'Euler

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla p, \quad \operatorname{div} u = 0. \tag{EI}$$

Ici, $u = u(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ désigne la vitesse du fluide et $p : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est appelée pression. Une très vaste littérature est dédiée à ces équations âgées de près de trois siècles, on pourra par exemple consulter les ouvrages [6, 23, 29].

À la vitesse u est associée une quantité fondamentale dans la description de certains écoulements ; il s'agit de la *vorticité*, encore appelée *tourbillon*, que l'on définit par

$$\omega = \operatorname{rot} u = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Dans notre cadre bidimensionnel, l'équation d'Euler en formulation tourbillon se présente sous la forme remarquable d'une équation de transport

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0. \tag{T}$$

Lorsque u et ω sont réguliers, ω est constant le long des trajectoires de u, c'est-à-dire

$$\omega(t, \phi_t(x)) = \omega(0, x), \tag{1}$$

où, pour tout x, la trajectoire $t \mapsto \phi_t(x) = \phi(t, x)$ est définie par

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\phi_t(x) = u(t, \phi_t(x)) \\ \phi_0(x) = x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{2}$$

En outre, $x \mapsto \phi_t(x)$ est pour chaque t un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^2$.

Il s'avère que la condition d'incompressibilité ($\operatorname{div} u = 0$) permet de reconstituer la vitesse u à partir de son rotationnel ω. En effet, il existe une fonction ψ, appelée *fonction courant*, telle que

$$u = \nabla^\perp \psi = (-\partial_2 \psi, \partial_1 \psi),$$

et ψ est par conséquent solution de l'équation de Poisson

$$\operatorname{rot} u = \Delta \psi = \omega.$$

Lorsque ω est par exemple nul à l'infini, ψ se détermine explicitement via la formule de convolution $\psi = G * \omega$, où G est la solution fondamentale de Δ sur $\mathbb{R}^2$: $G(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|$ pour $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. En introduisant le noyau de Biot-Savart

$$K(x) = \nabla^\perp G(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}, \quad (x_1, x_2)^\perp = (-x_2, x_1) \neq 0,$$

nous obtenons finalement la *loi de Biot-Savart*

$$u = K * \omega. \tag{3}$$

Il est également possible de donner un sens aux équations d'Euler lorsque le tourbillon ω n'est pas régulier, ceci tout en conservant la loi de Biot-Savart. On parle dans ce cas de *solution faible.*

Théorème (Yudovich, [41], cf. aussi [23]). *Soit $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Il existe une unique solution faible globale (u, ω) à l'équation d'Euler en formulation tourbillon avec donnée initiale ω_0 au sens suivant :*
(i) $\omega \in L^\infty\left(\mathbb{R}_+, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)\right)$;
(ii) $u = K * \omega$, $\omega = \operatorname{rot} u$;
(iii) le couple (u, ω) est solution de l'équation de transport $\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0$ au sens faible. Plus exactement[4], pour toute $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+, C^1_0(\mathbb{R}^2))$, pour tout $T \geq 0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(T, x)\omega(T, x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(0, x)\omega_0(x)\, dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \omega(\partial_t \varphi + u \cdot \nabla \varphi)\, dt\, dx.$$

[4]En vertu de la Proposition 1.2 ci-après, $u = K * \omega$ appartient à $L^\infty(L^1_{\text{loc}})$ dès que $\omega \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty)$, de sorte que $u \cdot \nabla \omega = \operatorname{div}(u\omega)$ définit effectivement une distribution.

Le problème de l'existence globale pour des tourbillons ω non bornés a donné lieu à de multiples extensions auxquelles nous reviendrons. La question de l'unicité dans un espace significativement plus vaste que L^∞ est quant à elle ouverte.

La loi de Kirchhoff. Dans l'optique de modéliser certains écoulements bidimensionnels, nous voudrions généraliser l'équation d'Euler pour le tourbillon lorsque celui-ci se concentre très fortement en des points, appelés points vortex :

$$\omega_\delta(t) \simeq \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{z_i(t)}, \quad l \in \mathbb{N}^*, \tag{H$_\delta$}$$

où les réels d_i représentent les intensités des points vortex. La vitesse $u = K * \omega_\delta$ correspondante s'écrit, en accord avec la formule de Biot-Savart

$$u(t) \simeq \sum_{i=1}^{l} d_i K\left(\cdot - z_i(t)\right).$$

Elle est très fortement singulière aux points $z_i(t)$ et le produit $u \cdot \nabla\omega = \operatorname{div}(u\omega)$ ne définit pas une distribution. On peut remédier à ce problème par des arguments formels[5] de symétrie : pour chaque point vortex z_i, considérons une approximation de δ_{z_i} par des fonctions régulières $\omega_{i,\varepsilon}$ à symétrie radiale autour de z_i. À l'aide des propriétés de symétrie de K, on vérifie que les vitesses $u_{i,\varepsilon} = K * \omega_{i,\varepsilon}$ qui en résultent vérifient $u_{i,\varepsilon}(z_i) \equiv 0$. Dans l'asymptotique où ε tend vers zéro, qui correspond à la situation décrite par (H$_\delta$), il est raisonnable de décider que cela reste vrai, c'est-à-dire que la vitesse créée par un point vortex est nulle en ce point. En réalité, ces considérations reviennent à remplacer le noyau K par

$$\widehat{K}(x) = K(x) \text{ si } x \neq 0, \quad \widehat{K}(0) = 0$$

dans la formule de Biot-Savart définissant la vitesse. En insérant ω_δ et $u = \widehat{K} * \omega_\delta$ dans la formulation faible ci-dessus de l'équation d'Euler, on parvient à un système d'équations différentielles ordinaires appelé *système des points vortex* ou *loi de Kirchhoff*

$$\dot{z}_i(t) = \sum_{j \neq i} d_j K\big(z_i(t) - z_j(t)\big), \quad i = 1, \dots, l.$$

L'analyse du système des points vortex, qui n'est défini que jusqu'au premier temps de collision entre les points, a fait l'objet de très nombreux travaux [3, 15–17, 29, 31] depuis près de deux siècles. Un exemple célèbre de collision en temps fini pour le système de trois points vortex est détaillé dans le livre de Marchioro et Pulvirenti [29] à la page 140.

Signalons la structure hamiltonienne remarquable du système des points vortex

$$2\pi d_i \dot{z}_i = \nabla_{z_i}^{\perp} W(z_1, \dots, z_l), \quad i = 1, \dots, l,$$

où l'hamiltonien W (énergie d'interaction entre les vortex)

$$W(z_1, \dots, z_l) = -\sum_{j \neq k} d_j d_k \ln|z_j - z_k|$$

est appelé fonctionnelle de Kirchhoff-Onsager.

[5]Dont nous verrons dans peu de temps qu'ils ont été rigoureusement justifiés.

Le système mixte Euler-points vortex. Dans les années quatre-vingt dix, Marchioro et Pulvirenti [28, 29] et Starovoitov [36, 37] ont envisagé le problème mixte correspondant à la *superposition* d'une partie plus régulière à la somme de masses de Dirac

$$\omega(t) \simeq \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{z_i(t)} + \omega_r(t) = \omega_\delta(t) + \omega_r(t), \tag{H$_\mathrm{m}$}$$

où le tourbillon $\omega_r \in L^\infty\left(L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)\right)$ entre dans le cadre du théorème de Yudovich, et pour lequel la vitesse correspondante s'écrit

$$u(t) \simeq \sum_{i=1}^{l} d_i K\left(\cdot - z_i(t)\right) + K * \omega_r(t).$$

Dans le modèle proposé par Marchioro et Pulvirenti afin de décrire cette situation, chaque composante (atomique $\omega_\delta(t)$ d'une part, et bornée et intégrable $\omega_r(t)$ d'autre part) du tourbillon est transportée par le champ de vitesse total $K * \omega$. On ôte cependant les termes les plus singuliers en vertu du même principe que précédemment, c'est-à-dire en remplaçant K par $\widehat{K}$. Ce faisant, on ne modifie pas les autres termes puisque ω_r est diffuse, et l'on obtient

$$\begin{cases} \partial_t \omega_r + (K * \omega) \cdot \nabla \omega_r = 0 \\ \partial_t \omega_\delta + (K * \omega_r + \widehat{K} * \omega_\delta) \cdot \nabla \omega_\delta = 0. \end{cases}$$

Finalement, la dynamique des points vortex $z_i(t)$ et de la composante bornée $\omega_r(t)$ est régie par un système couplé d'équations appelé *système mixte Euler-points vortex*[6]

$$\begin{cases} \partial_t \omega_r + (K * \omega) \cdot \nabla \omega_r = 0 \\ \dot{z}_i = (K * \omega_r)(t, z_i) + \sum_{j \neq i} d_j K\left(z_i(t) - z_j(t)\right), \quad i = 1, \ldots, l. \end{cases} \tag{M}$$

Au Chapitre 1, nous présenterons deux formulations[7] pour ce système et en donnerons des définitions plus précises.

L'existence d'une solution $(\omega_r, z_1, \ldots, z_l)$ pour le système mixte Euler-points vortex en formulation lagrangienne a été obtenue par Marchioro et Pulvirenti [28] (voir aussi [36]) dès que la vorticité $\omega_r(0)$ appartient à $L^1 \cap L^\infty$. Lorsque toutes les intensités d_i sont de même signe, cette solution est globale, les trajectoires des vortex sont C^1 et les points n'entrent jamais en collision. La composante bornée ω_r est L^∞ en temps à valeurs dans $L^1 \cap L^\infty$.

La pertinence du système des points vortex d'une part, et du système mixte d'autre part, pour décrire les situations (H$_\delta$) et (H$_\mathrm{m}$) a été établie de manière rigoureuse dans certaines situations. La signification donnée ici à « $\simeq$ » est celle de la convergence faible au sens de la mesure lorsqu'un paramètre ε tend vers zéro. Le premier résultat dans cette direction, qui concerne le cas purement atomique ($\omega_r \equiv 0$) d'un seul point dans un domaine borné, est dû à Turkington [39]. Ce résultat a été étendu par la suite au cas du système mixte Euler-points vortex comprenant plusieurs points par Marchioro et Pulvirenti [30]. Plus précisément, si l'un ou l'autre régime (H$_\delta$) ou (H$_\mathrm{m}$) est observé initialement, alors il en est de même à $t > 0$ et les points vortex vérifient la loi de Kirchhoff ou le système

[6] « Vortex-wave system ».

[7] Les formulations lagrangienne et eulérienne, comme l'explique le Paragraphe 1.2 ci-dessous.

mixte[8]. Toutefois, ces résultats ne s'appliquent que sous des hypothèses supplémentaires de « très bonne préparation » des données initiales $\omega_\varepsilon(0)$ vérifiant (H_δ) ou (H_m). Un exemple standard de telles données est celui formé par les superpositions de fonctions caractéristiques correctement pondérées de boules de rayon ε centrées en les z_i (poches de tourbillon).

La suite de cette section est un survol des Chapitres 1 à 4 de la thèse consacrés aux équations d'Euler.

1.2 Lien entre les formulations eulérienne et lagrangienne.

Équations de transport linéaires : un avant-propos. Nous avons évoqué deux angles d'approches pour l'équation d'Euler en formulation tourbillon. Le premier point de vue, qualifié d'eulérien, est axé sur l'équation (T) vérifiée par ω au sens faible. Le second, appelé lagrangien (ou particulaire) et caractérisé par (1), (2) et (3), fait intervenir la notion de trajectoires (ou particules). Lorsque la vitesse u est régulière en temps et en espace, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que ces deux points de vue sont équivalents. Dans les contextes plus généraux du théorème de Yudovich ou du système mixte Euler-points vortex, nous devons faire appel à la théorie développée ces vingt dernières années pour les équations de transport *linéaires* dont (T) constitue un exemple typique lorsque u est *fixé*.

L'étude de l'extension du théorème de Cauchy-Lipschitz et de la méthode des caractéristiques dans le cadre des équations de transport avec des champs u peu réguliers a connu un essor remarquable depuis l'article pionnier de DiPerna et Lions [12]. On pourra consulter [22] pour un panorama des résultats obtenus. Ces travaux ont mis en exergue l'étroite corrélation entre les propriétés d'unicité de la solution et de stabilité par rapport à des perturbations de u pour l'équation de transport (T), et l'existence et l'unicité d'un « flot généralisé » pour u. Lorsque ces propriétés ont lieu, l'unique solution de l'équation de transport est en outre constante le long de ce flot généralisé. Celui-ci coïncide avec la notion usuelle de trajectoire lorsque u est régulier.

Le concept de *solution renormalisée*, introduit par DiPerna et Lions et repris depuis dans les extensions [1, 2, 11], joue un rôle clé dans l'étude de ces questions. En résumé, on dit que ω est solution renormalisée de (T) si toutes les fonctions $\beta(\omega)$ sont solutions de (T) au sens des distributions, lorsque $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ vérifie des conditions de croissance convenables visant à donner un sens à tous les termes. Lorsque toute solution est solution renormalisée, on dit que u a la *propriété de renormalisation*. Pour des champs u assez généraux (par exemple bornés et à divergence bornée) *et* qui possèdent la propriété de renormalisation, il est relativement direct de vérifier les propriétés d'unicité et de stabilité pour l'équation (T) impliquant l'existence du flot généralisé.

La partie réellement délicate de la théorie de DiPerna et Lions consiste à déterminer des conditions assurant que u vérifie la propriété de renormalisation. Il est à noter que toute solution régulière ω est solution renormalisée : il suffit pour le voir de multiplier (T) par $\beta'(\omega)$, puis d'utiliser la règle de composition des dérivées. Pour des solutions non régulières, l'analyse passe par les régularisées $\omega_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \omega$, où ρ_ε est une approximation de l'unité. Ces régularisées vérifient une équation de transport de type (T) à laquelle s'ajoute un terme de reste, appelé *commutateur*, défini par $r_\varepsilon = (u \cdot \nabla\omega)_\varepsilon - u \cdot \nabla\omega_\varepsilon$. Pour que la propriété de renormalisation soit vérifiée, il suffit que ce commutateur converge vers zéro dans L^1_{loc}. Ceci est assuré dès lors que u est par exemple borné, à divergence bornée,

[8] Du moins jusqu'au premier temps de collision entre les points vortex.

et est L^1 en temps à valeurs dans un espace de Sobolev. Par une analyse approfondie de la structure de ces commutateurs, Ambrosio [1] a récemment étendu la propriété de renormalisation au cas d'un champ u à variation bornée.

Revenons à présent à l'équation d'Euler dans le cadre du théorème de Yudovich, pour laquelle $u = K * \omega$ est déterminé par la formule de Biot-Savart. Au cours du Chapitre 1, nous présenterons diverses propriétés de la convolution par le noyau K. Certaines d'entre elles assurent que u remplit toutes les conditions d'application des théorèmes de DiPerna et Lions. Par suite, nous vérifions le fait bien connu que, pour l'équation d'Euler, *les points de vue lagrangien et eulérien sont équivalents*. Le fait que u est de surcroît quasi-Lipschitz uniformément en temps[9] entraîne que le flot généralisé $\phi(t,x)$ est continu par rapport à la variable d'espace, C^1 en temps, et coïncide donc avec la notion usuelle de trajectoire. Puisque u est à divergence nulle, le théorème de Liouville implique par ailleurs que $\phi(t,\cdot)$ laisse invariante la mesure de Lebesgue pour tout t.

Le système mixte Euler-point vortex. Au Chapitre 1, on s'intéresse à la généralisation des notions et résultats précédents au système mixte Euler-points vortex (M). Le mouvement des points vortex étant fixé par la seconde équation de ce système, l'évolution de la partie bornée du tourbillon est décrite par l'équation de transport

$$\partial_t\omega_r + u\cdot\nabla\omega_r = \partial_t\omega_r + (v+H)\cdot\nabla\omega_r = 0, \tag{E}$$

où nous avons posé

$$u = v + H, \quad v = K * \omega_r \quad \text{et} \quad H = K * \Big(\sum_{i=1}^{l} d_i\delta_{z_i}\Big).$$

À l'instar de l'équation d'Euler classique (1) et (2), l'équation de transport (E) suggère de considérer la formulation lagrangienne

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\phi_t(x) = v\left(t,\phi_t(x)\right) + \displaystyle\sum_{i=1}^{l} d_i K\left(\phi_t(x) - z_i(t)\right), \\ \phi_0(x) = x, \quad x \neq z_i(0), \quad \forall i = 1,\dots,l, \\ \omega_r\left(t,\phi_t(x)\right) = \omega_r(0,x). \end{cases} \tag{L}$$

Cette formulation met en évidence la coexistence, ainsi que l'interaction, de deux classes de trajectoires : les trajectoires des points vortex d'une part, et le flot ϕ_t transportant la partie ω_r d'autre part. Le système précédent n'est défini que tant que le flot n'intersecte pas les points vortex. En réalité, des estimations a priori de Marchioro et Pulvirenti [28] révèlent que les distances $|\phi_t(x) - z_i(t)|$ restent strictement positives tant que les points vortex n'entrent pas en collision. Ceci rend possible de considérer la formulation lagrangienne (L) pour le système mixte jusqu'à ce premier temps de collision.

Dans la situation présente, le champ total $u = v + H$ se compose d'une partie régulière v, qui vérifie les conditions d'application des théorèmes à la DiPerna-Lions, et d'une partie très fortement singulière H en les points z_i, qui pour sa part n'en vérifie aucune. Cependant, H est très régulière en dehors des z_i et possède une forme explicite bien particulière. Grâce à ces observations, nous établirons la propriété de renormalisation.

[9] Au sens donné par la Proposition 1.2 ci-après.

Proposition (Lemme 1.5). *Pour l'équation* (E)*, le champ* $v + H$ *a la propriété de renormalisation.*

Il ne reste dès lors plus qu'à adapter les arguments de DiPerna et Lions pour obtenir le résultat principal du Chapitre 1.

Théorème (Théorèmes 1.1 et 1.2). *Les formulations eulérienne* (E) *et lagrangienne* (L) *du système mixte Euler-points vortex sont équivalentes.*

1.3 Unicité pour le système Euler-points vortex.

Comme nous le verrons plus loin, l'équation d'Euler peut être généralisée à des vorticités de type mesure, cadre qui contient en particulier les vorticités de la forme (H_δ) ou (H_m). La question de l'unicité dans la classe de ces solutions généralisées est ouverte, nous ne l'aborderons pas ici. En revanche, elle semble plus accessible pour le système mixte Euler-points vortex dans lequel la structure de la vorticité ω est *prescrite*. Dans ce contexte, l'unicité est entendue au sens suivant : deux solutions du système mixte Euler-points vortex sont égales si et seulement si leurs parties bornées d'une part, et leurs points vortex d'autres part, coïncident pour tout temps.

D'un point de vue lagrangien, la différence avec la dynamique classique de l'équation d'Euler réside dans la présence du champ créé par les points vortex. Ce dernier peut être assimilé à un champ extérieur uniformément borné et lipschitzien en dehors des vortex. Les difficultés, et éventuellement la non-unicité, proviennent donc essentiellement du comportement des particules $\phi_t(x)$ au voisinage des points vortex. Lorsque le support de la partie bornée ω_r n'intersecte initialement pas les points vortex, des estimations de Marchioro et Pulvirenti [28] fournissent pour tout temps une borne inférieure strictement positive de la distance entre les trajectoires issues du support de $\omega_r(0)$ et les points vortex. L'unicité est par conséquent acquise dans cette situation. Pour le cas d'un seul point vortex, Marchioro et Pulvirenti [28] ont envisagé la situation plus générale où la vorticité ω_r est initialement constante au voisinage du point vortex, et ont indiqué un schéma de preuve menant à l'unicité. Par ailleurs, Starovoitov [37] a établi ce résultat d'unicité en supposant que ω_r est de surcroît lipschitzien. Le résultat principal du Chapitre 2 concerne le système mixte Euler-points vortex avec plusieurs points pour lequel la vorticité ω_r est initialement constante dans un voisinage de chaque point vortex.

Théorème (Théorème 2.1). *Soient* $\omega_r^0 \in L^\infty_c(\mathbb{R}^2)$ *et des points* $z_1^0, \dots, z_l^0$ *vérifiant, pour un certain* $R_0 > 0$ *et des réels* α_i*,*

$$\omega_r^0 \equiv \alpha_i \ \ dans \ \ B(z_i^0, R_0), \quad \forall i = 1, \dots, l.$$

Alors pour tout $T > 0$*, il existe au plus une solution au système mixte Euler-points vortex sur* $[0, T]$ *avec cette donnée initiale.*

La démonstration que nous proposons met en œuvre des outils purement eulériens. Dans un premier temps, nous nous appuyons sur la propriété de renormalisation établie au Chapitre 1 pour vérifier que ω_r reste constante dans un voisinage des points vortex à temps positif.

Dans un second temps, nous déterminons l'équation satisfaite par le champ de vitesse $v = K * \omega_r$ à partir de celle satisfaite par ω_r. Celle-ci repose sur un résultat d'Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes [18] traitant le cas d'un seul point vortex fixé à l'origine.

L'unicité est alors établie au moyen d'estimations portant sur la différence des vitesses et sur les distances entre les points vortex.

En conclusion de ce chapitre, nous proposons une méthode alternative de preuve du Théorème 2.1 utilisant également le point de vue lagrangien.

1.4 À propos de l'évolution en temps grand du support du tourbillon.

Le Chapitre 3 est consacré à l'étude de l'évolution en temps grand de la taille du support de ω_r lorsque celui-ci est initialement compact.

Commençons par présenter un bref état de l'art de la dynamique classique de l'équation d'Euler ($\omega_\delta = 0$). Puisque $\omega \equiv \omega_r \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty)$, la vitesse $u = K * \omega$ est uniformément bornée[10]. Le tourbillon $\omega(t)$ étant transporté par les trajectoires de u, son support reste compact pour tout temps et admet en outre une croissance au plus linéaire en temps. Dans le cas général, cette borne est a priori optimale, comme l'illustre l'exemple explicite de croissance exactement linéaire d'Iftimie, Gamblin et Sideris [20]. Le tourbillon construit dans [20] est en fait une version régularisée de deux dipôles de points vortex d'intensités $(-1, +1)$, symétriques par rapport à l'origine et s'éloignant à vitesse presque constante et presque parallèlement à un axe.

Lorsque ω est de plus supposé *de signe constant*, des simulations numériques (comme par exemple [4]) montrent que le tourbillon tend à s'enrouler sur lui-même, ce qui ralentit la croissance de son support. Mathématiquement parlant, l'hypothèse de signe fixe permet de bénéficier du caractère constant de quantités fondamentales liées à l'équation d'Euler. Ces dernières, appelées respectivement centre d'inertie et moment angulaire, sont définies par

$$c_0 \equiv \int_{\mathbb{R}^2} x\omega(t,x)\,dx, \quad i_0 \equiv \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2\omega(t,x)\,dx.$$

Une première amélioration de l'estimation $\mathcal{O}(t)$ lorsque le tourbillon est initialement proportionnel à la fonction caractéristique d'une boule a été apportée par Marchioro [26], qui a établi la borne $\mathcal{O}(t^{\frac{1}{3}})$ à l'aide du moment angulaire i_0. Plus récemment, Iftimie, Gamblin et Sideris [20] ont utilisé de surcroît la conservation de c_0 pour obtenir la borne $\mathcal{O}((t\ln t)^{\frac{1}{4}})$. Une estimation similaire a parallèlement été obtenue par Serfati [35].

Pour ce qui concerne la question de l'évolution du support dans les domaines extérieurs, citons également les résultats de [27] et [19]. Suivant la géométrie du domaine envisagé, la conservation du centre d'inertie ou du moment angulaire n'a plus lieu et il faut alors recourir à des techniques différentes.

Mentionnons enfin que tous les résultats précédents s'étendent à des tourbillons non bornés $\omega \in L^\infty(L^1 \cap L^p)$, $p > 2$, pour lesquels la vitesse $u = K * \omega$ est uniformément bornée [13].

Plaçons-nous désormais dans le cadre du système mixte Euler-points vortex. Pour simplifier le propos, on se restreint au cas d'un seul point vortex d'intensité $\gamma \in \mathbb{R}$, toutefois les résultats qui suivent se transposent au cas de plusieurs points à modifications mineures près.

Théorème (Théorème 3.1). *Soient ω_r^0 à support compact, $z_0 \in \mathbb{R}^2$ et (ω_r, z) une*[11] *solution globale du sytème mixte Euler-point vortex correspondant à cette donnée initiale.*

[10] En vertu de la Proposition 1.2 du Chapitre 1.

[11] **La** solution si ω_r^0 est constant au voisinage de z_0, comme l'assure le Chapitre 2.

Pour tout $t \geq 0$, le support de $\omega_r(t)$ est inclus dans $B\big(0, C(1+t)\big)$, où C dépend de ω_r^0 et z_0.

Dans la situation où ω_r est initialement (par conséquent pour tout temps) *de signe constant*, par exemple *positif*, nous utiliserons les notions généralisées de centre d'inertie et de moment angulaire. En nous appuyant sur les techniques de [20], nous établirons le résultat principal du Chapitre 3.

Théorème (Théorème 3.2)**.** *Sous les mêmes hypothèses, supposons de plus que ω_r^0 soit positif et que l'une ou l'autre des conditions suivantes soit satisfaite*

(i) $\gamma < 0$ *et* $|\gamma| > \int_{\mathbb{R}^2} \omega_r^0$

(ii) $\gamma \geq 0$.

Pour tout $t \geq 0$, le support de $\omega_r(t)$ est inclus dans $B\big(0, C(t^{\frac{1}{4}} \ln\ln(t+2) + 1)\big)$, où C dépend de ω_r^0 et z_0.

1.5 Nappes de tourbillon et points vortex.

L'analyse du système mixte Euler-points vortex comporte la question de l'extension du théorème d'existence globale de Marchioro et Pulvirenti lorsque ω_r n'est plus bornée dans L^∞. Pour simplifier la présentation, on se place à nouveau dans le cadre d'un seul point vortex d'intensité $\gamma \in \mathbb{R}^*$.

Une première généralisation qu'il est naturel d'envisager est celle d'un tourbillon $\omega_r \in L^\infty(L^1 \cap L^p)$ avec $p > 2$. Le champ de vitesse $v = K * \omega_r$ étant continu et uniformément borné, l'équation différentielle ordinaire $\dot{z}(t) = v(t, z(t))$ fait encore sens. En revanche, on ne dispose plus d'estimations quasi-Lipschitz pour v ; il n'est donc pas clair qu'une trajectoire $\phi_t(x)$ issue d'un point $x \neq z_0$ n'entre jamais en collision avec le point vortex $z(t)$. L'approche particulaire pour le système mixte semble ainsi mal appropriée et il faut recourir au point de vue eulérien. Par des arguments de compacité, il est possible d'établir l'existence globale d'une solution eulérienne (le Paragraphe 3.4.2 du Chapitre 3 contient une esquisse de preuve).

Dans un second temps, on considère la situation où ω_r est si peu régulière que l'on ne peut pas définir la trajectoire du point vortex pour toute donnée initiale z_0[12]. Il nous faut alors revenir à l'équation d'Euler *non découplée* pour la vorticité *totale* $\omega = \omega_r + \gamma\delta_z$.

Dans la littérature, le problème de l'existence d'une solution à l'équation d'Euler dans un cadre plus général que celui du théorème de Yudovich a été abordé en premier lieu du point de vue des équations pour la vitesse[13]

$$\partial_t u + \operatorname{div}(u \otimes u) = -\nabla p, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u(0) = u_0.$$

L'angle d'attaque habituel consiste à régulariser u_0 puis à considérer la suite de solutions régulières (u_ε) qui en résulte. Lorsque $u_0 \in L^2_{\text{loc}}$, il est aisé de trouver u telle que u_ε

[12] Lorsque $\omega \in L^\infty(L^1 \cap L^p)$ avec $p > 1$, la vitesse $K * \omega \in L^\infty(W^{1,p}_{\text{loc}})$. D'après [12], on peut seulement dire que u admet un flot généralisé $z(t,x)$ tel que *pour presque tout* $z_0 \in \mathbb{R}^2$, $z(\cdot, z_0) \in C^1$ et vérifie $\dot{z}(t, z_0) = u(t, z(t, z_0))$.

[13] De par la condition d'incompressibilité, la forme que nous en donnons ici est équivalente à (EI).

converge faiblement vers u dans $L^\infty(L^2_{\text{loc}})$. L'absence éventuelle de convergence forte, appelée concentration, se traduit par l'apparition d'une mesure de défaut[14] $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ pour laquelle

$$u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon \rightharpoonup u \otimes u + \mu \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

En dépit de cette mesure de défaut, il se peut que u soit pourtant solution des équations d'Euler, on parle alors de *concentration évanescente*[15]. Ce phénomène, identifié par DiPerna et Majda [7–9], a depuis été abondamment étudié dans les travaux [10], [33], [24], [40] ou [23]. Il s'explique par le fait que, de par la structure particulière (divergence nulle) des fonctions test utilisées, il suffit en réalité que *certaines* non-linéarités du produit tensoriel $u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon$ passent à la limite. Cette observation est le cœur même du résultat d'existence globale obtenu par Delort [10] pour les vorticités *positives* qui sont des mesures de Radon à support compact appartenant à $H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ (nappes de tourbillon). La structure remarquable de l'équation d'Euler provoquant le phénomène de concentration évanescente est perçue dans la formulation suivante (Delort [10] ou Schochet [33]) : pour toute fonction test $\Phi = \nabla^\perp \psi$ à divergence nulle[16],

$$\int u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon : D\nabla^\perp \psi(x)\, dx = \int u_\varepsilon \omega_\varepsilon \cdot \nabla \psi(x)\, dx = \iint H_\psi(x,y)\omega_\varepsilon(x)\omega_\varepsilon(y)\, dx\, dy,$$

où $\omega_\varepsilon = \operatorname{rot} u_\varepsilon$, et où la fonction

$$H_\psi(x,y) = \frac{1}{2} K(x-y) \cdot [\nabla\psi(x) - \nabla\psi(y)]$$

est bornée sur $\mathbb{R}^2$ et continue en dehors de la diagonale $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 :\ x = y\}$. Le problème se résume alors à établir la convergence du membre de droite lorsque ω_ε converge faiblement vers $\omega = \operatorname{rot} u$.

Plus récemment, Poupaud [32] a étudié la question de l'existence globale pour des vorticités qui sont des mesures de Radon bornées positives. Dans [32], les équations d'Euler sont généralisées à ces vorticités via la formulation de Schochet présentée ci-dessus, où K est toutefois remplacé par $\widehat{K}$ afin que H_ψ soit également définie sur la diagonale. Néanmoins, le fait que H_ψ soit discontinue sur la diagonale est à l'origine d'une mesure de défaut, symétrique et concentrée sur la partie atomique de ω, dont on ne sait pas a priori si elle s'annule.

Il est à noter que toute mesure $\omega = \omega_r + \gamma\delta_z$, où (ω_r, z) est solution du système mixte Euler-point vortex, vérifie par essence la formulation de Poupaud des équations d'Euler sans mesure de défaut. Réciproquement, lorsque $\omega = \omega_r + \gamma\delta_z$ est solution de la formulation de Poupaud, et lorsque l'on suppose *de plus* que $\omega_r \in L^\infty(L^1 \cap L^p)$ pour un $p > 2$, alors (ω_r, z) est solution du système mixte Euler-point vortex.

Le résultat principal du Chapitre 4, qui allie les points de vue de Delort sur les nappes de tourbillon et de Poupaud sur les solutions généralisées de l'équation d'Euler, est le suivant.

Théorème (Théorème 4.1). *Soit $\omega_0 = \omega_r^0 + \gamma\delta_{z_0}$ une mesure de Radon bornée. On suppose que $\gamma \geq 0$ et ω_r^0 est positif, à support compact ne contenant pas z_0, et appartient à $H^{-1}(\mathbb{R}^2)$. Il existe une solution généralisée globale à l'équation d'Euler, sans mesure de défaut, avec donnée initiale ω_0. Celle-ci s'écrit $\omega = \omega_r + \gamma\delta_z$, où $\omega_r \in L^\infty(H^{-1})$ et $z \in C^{\frac{1}{2}}$.*

[14] Ici, $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ désigne l'ensemble des mesures de Radon sur $\mathbb{R}^2$.

[15] « Concentration-cancellation ».

[16] Ce type de formulation fut introduit sous une forme un peu différente par Delort, puis par Schochet sous la forme écrite ici.

2 L'équation de Ginzburg-Landau complexe.

Dans la seconde partie de ce mémoire, on considère une équation de Ginzburg-Landau complexe

$$(\kappa + i)\partial_t u = \Delta u + u(1 - |u|^2) \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N, \tag{GLC}$$

où $\kappa \geq 0$ et $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ est une fonction du temps et de l'espace à valeurs complexes. Nous nous focaliserons plus spécifiquement sur le cas bidimensionnel $N = 2$.

Cette équation appartient à la vaste famille des équations de Ginzburg-Landau complexes $\partial_t u = \gamma u + \tau \Delta u + \kappa u|u|^2$, où $\gamma, \tau, \kappa \in \mathbb{C}$, qui interviennent notamment comme modèles d'amplitude de systèmes physiques au voisinage d'une instabilité [43]. Il existe par ailleurs une analogie formelle entre (GLC) et l'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert modélisant le comportement de l'aimantation dans des matériaux ferromagnétiques [5].

Notre équation a une forme bien spécifique, il s'agit d'un cas intermédiaire entre l'équation de Ginzburg-Landau parabolique

$$\kappa \partial_t u = \Delta u + u(1 - |u|^2)$$

et son homologue hamiltonien, l'équation de Gross-Pitaevskii

$$i\partial_t u = \Delta u + u(1 - |u|^2).$$

Cette dernière est un modèle fréquemment utilisé en physique dans la description de la superfluidité de l'hélium 4 à basses températures ainsi que de la condensation de Bose-Einstein des gaz ultra-froids. Dans ces contextes, u représente une fonction d'onde macroscopique.

Chacune de ces équations est intrinsèquement liée à *l'énergie de Ginzburg-Landau*, définie pour un champ $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ par

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{(1 - |u|^2)^2}{4}\Big]\, dx.$$

Pour l'équation de Gross-Pitaevskii, E est un hamiltonien

$$\frac{d}{dt} E(u(t)) = 0,$$

alors que pour les versions dissipatives E est décroissante

$$\frac{d}{dt} E(u(t)) = -\kappa \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_t u|^2 \leq 0.$$

Les états fondamentaux des systèmes physiques correspondent aux minima de l'énergie de Ginzburg-Landau, c'est-à-dire aux *fonctions constantes de module égal à un.*

2.1 Le cadre bidimensionnel et la transformation de Madelung.

L'analogie de Madelung [69], introduite par ce dernier dans les années vingt, établit une correspondance formelle entre la dynamique des fluides classiques (équations d'Euler) et celle des fluides quantiques (notamment, équation de Gross-Pitaevskii). Plus exactement, la transformation de Madelung consiste à identifier $|u|^2$ à une densité ρ de fluide et $\nabla \arg(u)$

à une vitesse v du fluide. Lorsque $u = \sqrt{\rho}\exp(i\varphi)$ est solution de l'équation de Gross-Pitaevskii, les variables ρ et $v = -2\nabla\varphi$ satisfont à la *forme hydrodynamique de l'équation de Gross-Pitaevskii*

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}\,(\rho v) = 0 \\ \partial_t v + v \cdot \nabla v + \dfrac{\nabla \rho^2}{\rho} = \nabla\big[\dfrac{\Delta\rho}{\rho} - \dfrac{|\nabla\rho|^2}{2\rho^2}\big], \end{cases}$$

où le membre de droite de la seconde équation est nommé « pression quantique » dans la terminologie de la physique. Si l'on néglige cette dernière, on retrouve ici les équations d'Euler compressibles avec loi de pression donnée par $p(\rho) = \rho^2$.

La transformation de Madelung n'est autorisée que lorsque $|u| \neq 0$, condition qui ne sera dans la suite pas vérifiée partout. C'est en fait plutôt le *supercourant* ou *moment linéaire*

$$j(u) = u \times \nabla u = (u^\perp \cdot \partial_1 u, u^\perp \cdot \partial_2 u)$$

qui jouera le rôle d'une vitesse. Le supercourant est bien défini, y compris aux points d'annulation de u, et vérifie en outre $-2j(u) = \rho v \simeq v$ lorsque $|u| \simeq 1$. Il satisfait à la loi de conservation

$$\partial_t j(u) - 2\mathrm{div}\,(\nabla u \otimes \nabla u) = -\nabla P(u),$$

où

$$P(u) = |\nabla u|^2 + u \cdot \Delta u - \frac{|u|^4 - 1}{2}.$$

Pour poursuivre l'analogie avec la mécanique des fluides, on introduit enfin la *vorticité* (que l'on nomme également *jacobien* dans notre contexte)

$$J(u) = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\, j(u).$$

La structure de l'équation vérifiée par $J(u)$ est similaire à celle vérifiée par la vorticité ω de la mécanique des fluides, puisque

$$\partial_t J(u) = \mathrm{rot}\,\mathrm{div}\,(\nabla u \otimes \nabla u).$$

La suite de cette section présente un condensé des Chapitres 5 à 7 dédiés à l'équation de Ginzburg-Landau complexe.

2.2 Existence globale dans l'espace d'énergie finie.

Nous allons au préalable examiner les questions d'existence et d'unicité relatives à l'équation de Ginzburg-Landau complexe. Au Chapitre 5, nous chercherons des solutions appartenant à l'espace qui lui est naturellement associé, à savoir l'espace d'énergie

$$\mathcal{E} = \{u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \quad \text{t.q. } E(u) < \infty\}.$$

Pour l'équation de Gross-Pitaevskii, le caractère globalement bien posé du problème de Cauchy dans cet espace a été établi par Gérard [55] en dimensions $1 \leq N \leq 3$ et en dimension $N = 4$ pour de petites données initiales. Le point de départ consiste à munir $\mathcal{E}$ d'une structure d'espace complet afin d'y mettre sur pied une méthode de point fixe. Tous les arguments, ainsi que le résultat obtenu dans [55], se transcrivent à l'équation de

Ginzburg-Landau complexe. Grâce à la partie dissipative de l'équation, la solution ainsi trouvée est en outre régulière à temps positif.

En dimension supérieure $N > 4$, pour lesquelles l'exposant cubique de (GLC) est sur-critique, les méthodes de contraction échouent. Des techniques de compacité semblables à celles que Ginibre et Velo [56, 58] ont mises en œuvre pour des équations plus générales nous permettront d'obtenir un résultat d'existence globale. Cette méthode ne fournit malheureusement pas de résultat d'unicité, hormis pour le cas où κ est choisi suffisamment grand (en fonction de la dimension envisagée).

Théorème (Théorème 5.3)**.** *Soient $N \geq 1$ et $u_0 \in \mathcal{E}$. L'équation* (CGL) *admet une solution globale $u \in C(\mathbb{R}_+, H^1_{\mathrm{loc}})$ telle que $u(0) = u_0$. L'énergie de Ginzburg-Landau de u est finie à temps positif et décroissante.*

La deuxième partie du Chapitre 5, qui concerne exclusivement le cas bidimensionnel $N = 2$, est consacrée à l'étude du problème de Cauchy dans un espace « proche » de l'espace d'énergie finie $\mathcal{E}$. Ce cadre de résolution fut introduit par Bethuel et Smets [44] pour l'équation de Gross-Pitaevskii afin de traiter des données typiques[17], d'énergie éventuellement infinie, d'un régime que nous étudierons ultérieurement. Il s'agit de l'espace $\mathcal{V} + H^1(\mathbb{R}^2)$, où $\mathcal{V}$ est l'ensemble

$$\mathcal{V} = \{U \in L^\infty(\mathbb{R}^2),\ \nabla^k U \in L^2(\mathbb{R}^2),\ \forall k \geq 2,\ (1 - |U|^2) \in L^2(\mathbb{R}^2) \text{ et } \ \nabla|U| \in L^2(\mathbb{R}^2)\}.$$

Sur l'espace $\mathcal{V} + H^1(\mathbb{R}^2)$ est définie une fonctionnelle, appelée *énergie renormalisée.* Pour un élément $U + w$ de $\mathcal{V} + H^1(\mathbb{R}^2)$, on la note $E_U(U + w)$. Lorsque $U \in \mathcal{V}$ vérifie de surcroît $\nabla U \in L^2(\mathbb{R}^2)$, la corrélation entre l'énergie renormalisée et l'énergie de Ginzburg-Landau est indiquée par l'identité

$$E_U(U + w) = E(U + w) - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\nabla U|^2}{2}.$$

Celle-ci suggère que la conservation ou décroissance de E le long du flot $t \mapsto U + w(t)$ se transmettent à E_U. Bethuel et Smets [44] ont ainsi obtenu le caractère globalement bien posé du problème de Cauchy pour l'équation de Gross-Pitaevskii. Pour l'équation de Ginzburg-Landau complexe, nous obtiendrons le résultat suivant.

Théorème (Théorème 5.5)**.** *Pour tout $U \in \mathcal{V}$, le problème de Cauchy pour l'équation de Ginzburg-Landau complexe est globalement bien posé dans $\{U\} + H^1(\mathbb{R}^2)$. La solution $u = U + w \in \{U\} + C(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^2))$ est régulière (C^∞) à temps positif, et son énergie renormalisée est décroissante.*

2.3 Dynamique des vortex pour l'équation de Ginzburg-Landau complexe en dimension deux.

Cadre général. Dans tout ce paragraphe, nous nous focaliserons sur la dimension $N = 2$ d'espace. Les solutions physiquement acceptables des équations de Ginzburg-Landau parabolique, complexe ou de Gross-Pitaevskii, qui sont celles d'énergie finie, vérifient en un certain sens $|u| \simeq 1$ à l'infini. Elles peuvent aussi contenir des défauts localisés, appelés

[17] Les « superpositions de vortex », cf. le Chapitre 6.

vortex, c'est-à-dire des zéros isolés du champ autour desquels la circulation du gradient de la phase est non nulle.

Un exemple typique de telles solutions est fourni par la famille de solutions *stationnaires* équivariantes

$$u_d^*(re^{i\theta}) = f_d\,(r)\, e^{id\theta},$$

où $d \in \mathbb{Z}$, et où le profil $f_d : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ satisfait à l'équation différentielle

$$\begin{cases} -f_d'' - \dfrac{1}{r} f_d' + \dfrac{d^2}{r^2} f_d = f_d(1 - f_d^2) \\ f_d(0) = 0, \quad f_d(+\infty) = 1. \end{cases}$$

Dans certaines situations, les expériences physiques indiquent que les vortex présents dans le champ initial subsistent à temps positif et interagissent en fonction de l'équation considérée. Nous attacherons un intérêt particulier à la situation où la dynamique de ces vortex procure à elle seule une description réduite de la dynamique globale de la solution.

Supposons qu'une solution u, régulière, contienne un vortex situé en $x = x_0$. À temps fixé, considérons le changement d'échelle $x \mapsto \varepsilon^{-1}(x - x_0)$, où ε est un petit paramètre positif. En faisant tendre ε vers zéro, on tend à effacer les oscillations de $|u|$ en dehors de x_0 tout en conservant la trace du vortex en x_0. Compte tenu de l'échelle propre aux équations considérées, ces considérations suggèrent d'introduire le changement de variable parabolique

$$u_\varepsilon(t,x) = u(\varepsilon^{-2}t, \varepsilon^{-1}x),$$

et d'étudier la dynamique des vortex pour les équations qui en résultent dans l'asymptotique où ε tend vers zéro.

Ce faisant, l'équation de Ginzburg-Landau complexe obtenue est

$$(\kappa + i)\partial_t u_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon (1 - |u_\varepsilon|^2) \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \qquad (\mathrm{GLC})_\varepsilon$$

où $u_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$. En outre, l'énergie de Ginzburg-Landau s'écrit dans cette échelle

$$E_\varepsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^2} \Big[\frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{(1 - |u|^2)^2}{4\varepsilon^2}\Big]\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} e_\varepsilon(u)\, dx.$$

Les données initiales typiques que nous avons à l'esprit sont obtenues par superposition de l vortex stationnaires centrés en des points $z_1, \ldots, z_l \in \mathbb{C}$,

$$u_\varepsilon^*(z_i, d_i)(z) := \prod_{i=1}^{l} u_{\varepsilon, d_i}^*(z - z_i) = \prod_{i=1}^{l} f_{d_i}\left(\frac{|z - z_i|}{\varepsilon}\right)\left(\frac{z - z_i}{|z - z_i|}\right)^{d_i}, \quad z \in \mathbb{C},$$

où les $d_i \in \mathbb{Z}$ et les profils f_{d_i} sont définis plus haut. Les d_i sont les degrés topologiques de u_ε^* autour du point z_i. De telles juxtapositions sont appelées *configurations de référence* par rapport à la configuration (z_i, d_i). Notons d'ores et déjà que les $u_\varepsilon^*(z_i, d_i)$ convergent presque partout vers

$$u^*(z_i, d_i)(z) = \prod_{i=1}^{l} u_{d_i}^*(z - z_i) = \prod_{i=1}^{l} \left(\frac{z - z_i}{|z - z_i|}\right)^{d_i}.$$

Bien entendu, le flot de $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$ ne laisse pas invariante la classe des configurations de vortex (sauf si $l=1$), mais nous verrons qu'il en reste proche en un certain sens[18].

Outils mathématiques. L'énergie et la vorticité définies ci-dessus s'avèrent être des quantités adaptées pour décrire le comportement de u_ε.

• **L'énergie de Ginzburg-Landau.** Pour des degrés $d_i \in \mathbb{Z}$, l'énergie de Ginzburg-Landau des superpositions de vortex peut être calculée explicitement [45]. Au premier ordre en ε, on a[19]

$$E_\varepsilon(u^*_\varepsilon(z_i,d_i),B(R)) = \pi\sum_{i=1}^{l} d_i^2|\ln\varepsilon| + C(|d_1|,\dots,|d_l|,z_1,\dots,z_l,R) + o_\varepsilon(1).$$

Chaque terme $d_i^2|\ln\varepsilon|$ correspond au coût minimal en énergie d'un vortex de degré d_i. On constate en passant qu'il est ainsi énergétiquement moins défavorable pour un champ de contenir l vortex de degré 1 qu'un seul de degré l.

Plus généralement, l'énergie des champs u_ε considérés vérifiera

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon,B(R)) \le C(R)|\ln\varepsilon|, \quad C(R)>0.$$

Cette borne est divergente lorsque ε tend vers zéro. Cependant, le facteur de pénalisation ε^{-2} présent dans le potentiel implique que $|u_\varepsilon| \simeq 1$ hormis peut-être dans de petites régions. Afin de caractériser le comportement de u_ε dans ces petites régions, où se trouvent les zéros éventuels, on utilise la notion de vorticité.

• **Le jacobien et la vorticité.** À un champ $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, nous avons associé plus haut la vorticité $J(u) = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\, j(u)$, où $j(u) = u \times \nabla u$. Lorsque u est régulier, la vorticité coïncide avec le jacobien $J(u) = \det \nabla u$. Ces notions sont étroitement liées à celle de degré topologique. Dans l'exemple fondamental du vortex décrit plus haut, le degré topologique d correspond à la circulation de la phase (à un facteur multiplicatif de 2π près) sur n'importe quel cercle entourant l'origine.

Là où $|u| \simeq 1$, on peut écrire localement $u = \rho\exp(i\varphi)$, le supercourant $j(u) = \rho^2\nabla\varphi \simeq \nabla\varphi$ est presque un gradient et la vorticité presque nulle. Pour les exemples fondamentaux de superpositions de vortex centrés en les z_i, la vorticité se concentre en ces points :

$$J(u^*(z_i,d_i)) = \pi\sum_{i=1}^{l} d_i\delta_{z_i}, \quad J(u^*_\varepsilon(z_i,d_i)) \simeq \pi\sum_{i=1}^{l} d_i\delta_{z_i}, \qquad (\mathrm{H}_\delta)$$

le jacobien sera donc un outil utile pour détecter les vortex.

Données très bien préparées. En un sens, les concepts de jacobien et d'énergie permettent de caractériser la proximité de u_ε à la configuration $u^*_\varepsilon(z_i,d_i)$. Soient des entiers $d_i = \pm 1$ tels que $d = \sum d_i = 0$. Nous dirons que la famille $(u_\varepsilon) \in H^1_{\mathrm{loc}}$ est *très bien préparée* par rapport à la configuration (z_i,d_i) si

$$(i)\ J(u_\varepsilon) \rightharpoonup \pi\sum_{i=1}^{l} d_i\delta_{z_i} \quad \text{et} \quad (ii)\ E_\varepsilon(u_\varepsilon) - E_\varepsilon(u^*_\varepsilon(z_i,d_i)) = o_\varepsilon(1),$$

[18] cf. les notions de bonne préparation ci-après.

[19] Il s'agit là de l'énergie $\int_{B(R)}|v^*_\varepsilon(z_i,d_i)|^2$ de la vitesse $v^*_\varepsilon = K * \omega^*_\varepsilon$ associée en mécanique des fluides à la superposition $\omega^*_\varepsilon(z_i,d_i) = \varepsilon^{-2}\sum d_i\chi_{B(z_i,\varepsilon)}$ de poches de tourbillon.

où la convergence est entendue dans le dual de $W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}$.

Ici s'imposent quelques commentaires. La condition $d = 0$ est indispensable pour que l'énergie de Ginzburg-Landau des configurations $u^*_\varepsilon(z_i, d_i)$ soit finie. Le cas contraire nécessite des modifications sensibles (voir la Définition 6.1) : d'une part, on remplace l'énergie usuelle par l'énergie renormalisée évoquée au paragraphe précédent. D'autre part, on impose pour l'énergie de Ginzburg-Landau une borne uniforme sur les grandes couronnes $B(2^{n+1}) \setminus B(2^n)$ pour n suffisamment grand. Celle-ci garantit entre autres que les vortex de u_ε sont bien localisés.

Enfin, mentionnons que les hypothèses de très bonne préparation impliquent la concentration des *densités d'énergie* en les points vortex :

$$\frac{e_\varepsilon(u_\varepsilon)}{|\ln \varepsilon|} \rightharpoonup \pi \sum_{i=1}^{l} \delta_{z_i},$$

qui est consistante avec l'expression de l'énergie totale ci-dessus lorsque $u_\varepsilon = u^*_\varepsilon$.

Dynamique des vortex dans les équations de Ginzburg-Landau. L'étude de la dynamique des points vortex pour les cas purement parabolique ou hamiltonien a fait l'objet d'un grand nombre de travaux depuis une vingtaine d'années. Neu [72] obtint cette dynamique par des calculs formels. Les justifications rigoureuses ont été apportées, pour l'équation de Gross-Pitaevskii, par Colliander et Jerrard [52], Lin et Xin [68], Jerrard et Spirn [63] (pour le cas du domaine borné ou périodique) et par Bethuel, Jerrard et Smets [48] (pour le plan en entier). L'équation parabolique a pour sa part été amplement étudiée dans les articles de Lin [67], Jerrard et Soner [60], Bethuel, Orlandi et Smets [49, 50] et Serfaty [75, 76]. Sous forme abrégée, les résultats de convergence connus peuvent s'énoncer de la façon suivante. On rappelle que W désigne la fonctionnelle de Kirchhoff-Onsager définie en première partie de cette introduction.

Théorème (Équation de Gross-Pitaevskii). *Si la famille $u_\varepsilon(0)$ est très bien préparée par rapport à la configuration (z_i^0, d_i), la famille $u_\varepsilon(t)$ de solutions correspondante est très bien préparée par rapport à $(z_i(t), d_i)$ pour tout $t \in [0, T^*)$, où*

$$\begin{cases} \pi d_i \dot{z}_i = \nabla^\perp_{z_i} W \\ z_i(0) = z_i^0, \end{cases}$$

et T^* est le temps maximal d'existence pour cette EDO.

On retrouve là précisément la loi de Kirchhoff de la mécanique des fluides ! Cette dynamique commune n'est pas pure coïncidence, elle résulte de la structure similaire des équations pour les vorticités ω et $J(u)$ dans l'un ou l'autre cas, ou, selon le point de vue, de la limite commune des hamiltoniens.

Pour l'équation de Ginzburg-Landau parabolique, les points vortex évoluent dans l'échelle de temps accélérée $\tau = t|\ln \varepsilon|$. Leur mouvement sera observé dans l'échelle de temps originale si l'on suppose que

$$\kappa = \kappa_\varepsilon = \delta |\ln \varepsilon|^{-1}, \quad \delta > 0 \text{ fixé}.$$

Théorème (Équation parabolique). *Avec les mêmes hypothèses, la famille $u_\varepsilon(t)$ est très bien préparée par rapport à $(z_i(t), d_i)$ sur $[0, T^*)$, où*

$$\begin{cases} \pi \delta^2 d_i \dot{z}_i = -\delta d_i \nabla_{z_i} W \\ z_i(0) = z_i^0, \end{cases}$$

et T^* est le temps maximal d'existence pour cette EDO.

Pour des vortex unitaires $d_i \equiv 1$, le système d'équations différentielles ainsi trouvé s'obtient à partir du précédent par rotation d'angle $\pi/2$. Mentionnons que Serfaty [76] et Bethuel, Orlandi et Smets [49, 50] étendent ce résultat à des données initiales bien plus générales et au-delà des temps de collision.

L'objectif du Chapitre 6 est de déterminer la dynamique pour l'équation intermédiaire $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$. Sans surprise, le système d'équations différentielles ordinaires obtenu est une combinaison des deux précédents.

Théorème (Équation de Ginzburg-Landau complexe, Théorème 6.1)**.** *Avec les mêmes hypothèses, la famille $u_\varepsilon(t)$ est très bien préparée par rapport à $(z_i(t), d_i)$ sur $[0, T^*)$, où*

$$\begin{cases} \pi(1+\delta^2) d_i \dot{z}_i = \nabla_{z_i} W^\perp - \delta d_i \nabla_{z_i} W \\ z_i(0) = z_i^0, \end{cases}$$

et T^* est le temps maximal d'existence pour cette EDO.

Le cadre que nous considérerons, qui est celui traité par Bethuel, Jerrard et Smets [48] pour l'équation de Gross-Pitaevskii, est celui du plan $\mathbb{R}^2$ en entier. Une partie importante de notre analyse, notamment l'emploi de l'énergie renormalisée afin de traiter les configurations de vortex arbitraires, est inspirée de [48].

Lin et Xin [68] ont initié l'étude de la dynamique des vortex pour $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$ en présentant cette équation comme une régularisation de l'équation de Gross-Pitaevskii. Toutefois il semble que le résultat de [68] concernant le mouvement des vortex pour $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$ soit erroné, et que notre résultat en fournisse un énoncé correct.

Enfin, cette dynamique a été établie indépendamment et simultanément par Kurzke, Melcher, Moser et Spirn [64] pour le cas d'un domaine borné et simplement connexe. Deux de ces auteurs [65] ont par ailleurs déterminé cette dynamique en présence d'un champ magnétique extérieur.

Nous avons vu que les jacobiens $J(u_\varepsilon)$ se prêtent bien à l'équation de Gross-Pitaevskii, en revanche ils ne sont guère adaptés à l'équation purement parabolique. Inversement, les densités d'énergie $e_\varepsilon(u_\varepsilon)$ ont été spécifiquement utilisées pour l'équation parabolique mais ne sont pas adaptées à celle de Gross-Pitaevskii. Pour l'équation complexe, nous établirons la dynamique des vortex à partir d'une formule d'évolution vérifiée par une combinaison adéquate des jacobiens *et* des densités d'énergie pour chaque ε.

Bonne préparation des données initiales. On voudrait à présent s'affranchir de l'hypothèse de très bonne préparation afin de considérer des *données bien préparées*, pour lesquelles l'hypothèse (ii) est remplacée par

$$(ii)' \ \Sigma_\varepsilon = E_\varepsilon(u_\varepsilon) - E_\varepsilon(u_\varepsilon^*) = \mathcal{O}_\varepsilon(1).$$

Lorsque les données initiales sont seulement bien préparées, il est encore possible de déterminer des trajectoires $\{z_i(t)\}$ en lesquelles les jacobiens se concentrent (Théorème 6.4). L'enjeu consiste à comprendre l'effet de l'excès d'énergie sur le mouvement des points $z_i(t)$.

L'exemple le plus simple de données bien préparées est formé par la superposition d'une phase et d'une configuration de vortex

$$u_\varepsilon(z) = u_\varepsilon^*(z_i, d_i) \exp\left(i\varphi_\varepsilon(z)\right),$$

où φ_ε est à support compact. L'excès d'énergie qui en résulte vérifie

$$\Sigma_\varepsilon \lesssim \|\nabla\varphi_\varepsilon\|_{L^2}^2 + o_\varepsilon(1),$$

le supercourant $j(u_\varepsilon) = j(u_\varepsilon^*) + |u_\varepsilon^*|^2\nabla\varphi_\varepsilon$, et le jacobien

$$J(u_\varepsilon) \simeq \sum_{i=1}^{l} d_i\delta_{z_i} + \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\left(|u_\varepsilon^*|^2\nabla\varphi_\varepsilon\right). \tag{H$_\mathrm{m}$}$$

Puisque $|u_\varepsilon^*| \simeq 1$ et rot $(\nabla\varphi_\varepsilon) = 0$, la famille u_ε est donc bien préparée dès lors que $\|\nabla\varphi_\varepsilon\|_{L^2} = \mathcal{O}_\varepsilon(1)$. Ceci autorise entre autres les phases rapidement oscillantes données par $\varphi_\varepsilon(z) = \varphi(\varepsilon^{-1}z)$.

Dans la correspondance entre l'équation de Gross-Pitaevskii et les équations d'Euler, le terme dans (H$_\mathrm{m}$) causé par l'excès de phase joue exactement le rôle de la partie bornée ω_r dans le système mixte Euler-points vortex. Dans ce dernier, la partie ω_r engendre un champ de vitesse additionnel $v = K * \omega_r$ qui perturbe le mouvement des points vortex. Par pure analogie, l'excès de phase pourrait avoir un effet comparable dans l'équation de Gross-Pitaevskii, même si on l'imagine évanescent avec ε.

• **Pour l'équation parabolique**, le résultat de « très bonne préparation instantanée » de Serfaty [76] assure que l'excès d'énergie s'est totalement dissipé après un temps $T_\varepsilon = o_\varepsilon(1)$, le mouvement des points vortex n'est donc pas affecté. Les données initiales plus générales considérées par Bethuel, Orlandi et Smets [49] autorisent quant à elles un excès d'énergie d'ordre $|\ln\varepsilon|$, l'évolution des vortex s'en trouve alors perturbée par un terme résiduel constant. D'un point de vue formel, ceci s'explique par le fait que l'excès de phase φ_ε vérifie hors des vortex une équation de type chaleur

$$\kappa_\varepsilon\partial_t\varphi_\varepsilon - \Delta\varphi_\varepsilon \simeq 0,$$

ce qui provoque la rapide dissipation de $\nabla\varphi_\varepsilon$.

• **Pour l'équation de Gross-Pitaevskii**, qui ne bénéficie pas du mécanisme de dissipation d'énergie de l'équation parabolique, mais seulement d'un effet dispersif, la question reste ouverte. Lin et Xin [68] caractérisent l'impact de l'excès d'énergie par une mesure de défaut μ, liée au manque de compacité forte de ∇u_ε en dehors des vortex, pour laquelle

$$\pi d_i\dot{z}_i = \nabla_{z_i}^\perp W + \langle\mu : D\nabla^\perp\vec{\chi}\rangle,$$

où $\vec{\chi} = (e_1\cdot x, e_2\cdot x)$ dans un voisinage des points z_i. L'article [68] ne contient cependant aucune description supplémentaire de cette mesure de défaut.

Pour l'équation de Ginzburg-Landau complexe, qui hérite d'un certain nombre de propriétés de l'équation parabolique, dont celles de dissipation, la question est également ouverte mais probablement plus abordable. Tant pour l'équation complexe que pour celle de Gross-Pitaevskii, une première étape dans la compréhension du problème passerait peut-être par l'analyse du comportement de l'excès de phase « loin des vortex ». Revenons à l'exemple de données bien préparées décrit ci-dessus, où l'on suppose pour simplifier que $d = \sum d_i = 0$. Loin des vortex, le module de u_ε est proche de un, et le champ se comporte comme

$$u_\varepsilon(z) = \rho_\varepsilon(z)\exp\left(i\varphi_\varepsilon(z)\right), \quad \rho_\varepsilon \simeq 1. \tag{4}$$

Ceci suggère de considérer dans un premier temps la situation simplifiée où (4) a lieu dans tout l'espace et d'étudier la dynamique, dont l'éventuelle dissipation, des quantités $\nabla\varphi_\varepsilon$ et ρ_ε. Cette discussion nous mène au chapitre suivant.

2.4 Dynamique des ondes amorties pour l'équation de Ginzburg-Landau complexe.

Au Chapitre 7, nous délaissons le cadre bidimensionnel et nous plaçons dans le cas de dimensions $N \geq 1$ en espace.

Les problèmes soulevés précédemment nous amènent à abolir les vortex et à analyser un nouveau régime pour $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$, dans lequel les solutions[20] Ψ_ε sont de petites perturbations de champs de module égal à un. Plus précisément, on suppose que

$$\Psi_\varepsilon = \rho_\varepsilon \exp(i\varphi_\varepsilon) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N,$$

et que le module ρ_ε et le gradient de la phase $\nabla\varphi_\varepsilon$ sont donnés par le changement d'inconnues

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon^2(t,x) = 1 + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b_\varepsilon(t,x) \\ 2\nabla\varphi_\varepsilon(t,x) = v_\varepsilon(t,x), \end{cases} \tag{5}$$

où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre destiné à tendre vers zéro. Ici, le couple $(b_\varepsilon, v_\varepsilon)(t)$ appartient à un espace de Sobolev $H^{s+1}(\mathbb{R}^N) \times H^s(\mathbb{R}^N)$ avec $s \geq 3$ et vérifie certaines bornes. Ces dernières assureront notamment que la solution Ψ_ε *ne s'annule en aucun point de* $\mathbb{R}^N$ tant que (5) a lieu.

Notons que le changement d'échelle $\Psi(t,z) = \Psi_\varepsilon(\varepsilon^2 t, \varepsilon z)$ nous ramène à l'équation de Ginzburg-Landau complexe originale. En particulier, le régime (5) correspond à un régime asymptotique onde-longue pour (GLC) dans lequel les solutions sont des perturbations de champs constants de module égal à un. Ces derniers forment des solutions stationnaires élémentaires de l'équation.

Dans notre étude de la dynamique des vortex pour l'équation de Ginzburg-Landau complexe, nous avons prescrit un coefficient de dissipation κ_ε proportionnel à $|\ln\varepsilon|^{-1}$. Dorénavant, on considérera des coefficients plus généraux :

$$\kappa = \kappa(\varepsilon) = \kappa_\varepsilon, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \kappa_\varepsilon = 0, \quad 0 < \varepsilon \leq \kappa_\varepsilon < 1.$$

Notre objectif est d'obtenir un système asymptotique simplifié d'équations pour la perturbation $(b_\varepsilon, v_\varepsilon)$, pour autant que celle-ci soit bien définie, permettant de mieux appréhender sa dynamique lorsque ε tend vers zéro. En réalité, on discerne plus nettement la structure de ces équations en ralentissant le temps. En effet, les nouvelles inconnues a_ε et u_ε, définies par

$$a_\varepsilon(t,x) = b_\varepsilon(\varepsilon t, x), \quad u_\varepsilon(t,x) = v_\varepsilon(\varepsilon t, x),$$

vérifient le système d'équations [21]

$$\begin{cases} \partial_t a_\varepsilon + \sqrt{2}\,\mathrm{div}\, u_\varepsilon + \dfrac{2\kappa_\varepsilon}{\varepsilon} a_\varepsilon - \kappa_\varepsilon \varepsilon \Delta a_\varepsilon = \mathrm{f}_\varepsilon(a_\varepsilon, u_\varepsilon) \\ \partial_t u_\varepsilon + \sqrt{2}\nabla a_\varepsilon - \kappa_\varepsilon\varepsilon\Delta u_\varepsilon = \mathrm{g}_\varepsilon(a_\varepsilon, u_\varepsilon), \end{cases} \tag{6}$$

où le membre de droite $(\mathrm{f}_\varepsilon, \mathrm{g}_\varepsilon)$ peut être interprété comme une perturbation en a_ε et u_ε lorsque ε tend vers zéro. Dans la limite où ε tend vers zéro se dégage ainsi une *équation*

[20] Les solutions de $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$ sont désormais notées Ψ_ε, contrairement au chapitre précédent où elles étaient notées u_ε. La notation u_ε sera employée ici à d'autres fins, voir ci-après.

[21] Après conjugaison complexe $\Psi_\varepsilon \mapsto \overline{\Psi}_\varepsilon$ et remise à l'échelle en temps $t \mapsto (\kappa_\varepsilon^2+1)t$ pour plus de lisibilité, notons toutefois que $\kappa_\varepsilon^2 + 1 \simeq 1$.

des ondes amorties

$$\begin{cases} \partial_t a_{\mathrm{L}} + \sqrt{2}\mathrm{div}\, u_{\mathrm{L}} + \dfrac{2\kappa_\varepsilon}{\varepsilon} a_{\mathrm{L}} = 0 \\ \partial_t u_{\mathrm{L}} + \sqrt{2}\nabla a_{\mathrm{L}} = 0, \end{cases}$$

dont les solutions possèdent de bonnes propriétés de décroissance.

Signalons que Capella, Melcher et Otto [5] ont mis en évidence une dynamique d'ondes amorties pour un régime particulier de l'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert, qui présente une analogie formelle avec l'équation de Ginzburg-Landau complexe. Pour l'équation de Gross-Pitaevskii, obtenue en posant $\kappa_\varepsilon = 0$, l'équation asymptotique obtenue par ces considérations formelles est l'équation des ondes avec vitesse de propagation $\sqrt{2}$. De fait, le régime (5) a été récemment étudié par Bethuel, Danchin et Smets [46]. Les auteurs ont en particulier déterminé une borne inférieure pour le premier temps d'apparition éventuelle d'un zéro de la solution. Ils ont en outre démontré que $(a_\varepsilon, u_\varepsilon)$ vérifie effectivement une dynamique de type ondes si la perturbation initiale est suffisamment petite en norme de Sobolev.

Notre analyse du régime (5) pour l'équation de Ginzburg-Landau complexe s'inspire en grande partie de celle de [46]. Le premier enjeu consiste à déterminer la « taille » maximale autorisée pour la perturbation initiale $(b_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0) = (a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)$ qui assure que la solution Ψ_ε ne s'annule pas sur un intervalle de temps indépendant de ε. Cette condition est bien entendu nécessaire pour définir le couple $(a_\varepsilon, u_\varepsilon)$. Une fois cette question résolue, notre seconde tâche vise à estimer l'écart entre $(a_\varepsilon, u_\varepsilon)$ et la solution $(a_{\mathrm{L}}, u_{\mathrm{L}})$ de l'équation des ondes amorties avec même donnée initiale.

Il nous faut tenir compte de, et peut-être trouver le bon équilibre entre, deux paramètres évanescents κ_ε et ε. Le premier correspond à l'ampleur de la dissipation ajoutée à l'équation de Gross-Pitaevskii, et le second à la taille de la perturbation de la solution par rapport à une solution constante de module un.

Nous présentons ici une version partielle et simplifiée des principaux résultats obtenus au Chapitre 7.

Théorème (D'après les Théorèmes 7.1 et 7.2)**.** *Soit s un entier vérifiant $s > 1 + N/2$. Il existe des constantes $K_1(s,N)$ et $K_2(s,N)$ et $\varepsilon_0 > 0$ vérifiant la propriété suivante. Soient $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et $(a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0 = 2\nabla\varphi_\varepsilon^0) \in H^{s+1}(\mathbb{R}^N) \times H^s(\mathbb{R}^N)$ tels que*

$$X_0 := \|(a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)\|_{H^s} + \varepsilon\|a_\varepsilon^0\|_{H^{s+1}} + \|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2} \le \frac{\min(\varepsilon^{-1}\kappa_\varepsilon, \kappa_\varepsilon^{-1})}{K_1(s,N)}.$$

Alors (6) admet une unique solution globale $(a_\varepsilon, u_\varepsilon) \in C(\mathbb{R}_+, H^{s+1} \times H^s)$ avec donnée initiale $(a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)$. En outre,

$$\|(a_\varepsilon, u_\varepsilon)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,H^s)} + \varepsilon\|a_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,H^{s+1})} + (\varepsilon\kappa_\varepsilon^{-1})^{1/2}\|(a_\varepsilon, u_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}_+,H^s)} \le K_2(s,N)X_0.$$

Si $\Psi_\varepsilon = (1 + \varepsilon b_\varepsilon/\sqrt{2})^{1/2}\exp(i\varphi_\varepsilon)$ désigne la solution correspondante de $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$, on a

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \||\Psi_\varepsilon(t)|^2 - 1\|_\infty \le \frac{1}{2}.$$

Enfin, lorsque (a_L, u_L) désigne la solution de l'équation des ondes amorties avec donnée initiale $(a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)$, on a

$$\|(a_\varepsilon - a_L, u_\varepsilon - u_l)(t)\|_{H^{s-2}} \le C_2\sqrt{\varepsilon t}\Big(\sqrt{\kappa_\varepsilon}X_0^2 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\kappa_\varepsilon}}X_0\Big).$$

En particulier, sous la condition $\kappa_\varepsilon > \varepsilon$ (c'est-à-dire, avec suffisamment, mais peu de dissipation), il n'y a pas, même en temps grand, d'apparition de zéros dans la solution.

Soulignons d'autre part qu'en temps grand, une meilleure approximation du comportement de $(a_\varepsilon, u_\varepsilon)$ peut être obtenue en tenant compte des termes $(\kappa_\varepsilon \varepsilon \Delta a_\varepsilon, \kappa_\varepsilon \varepsilon \Delta u_\varepsilon)$ dans les équations (6) (Théorème 7.3). La présence de ces termes paraboliques permet en outre de perdre moins de dérivées dans les estimations de comparaison.

L'ingrédient essentiel, introduit dans [46], tient dans l'ajout d'une nouvelle variable complexe

$$z_\varepsilon \equiv \nabla(2\varphi_\varepsilon - i \ln \rho_\varepsilon^2) \in \mathbb{C}^N,$$

et dans un système d'équations étendu en les variables $(b_\varepsilon, z_\varepsilon)$. Il est à noter que

$$E_\varepsilon(\Psi_\varepsilon) \simeq \frac{1}{8}\|(b_\varepsilon, z_\varepsilon)\|_{L^2}^2 \quad \text{tant que} \quad |\Psi_\varepsilon| \simeq 1.$$

Les démonstrations des Théorèmes 7.1, 7.2 et 7.3 consistent alors à obtenir des estimations convenables pour la norme $\|(b_\varepsilon, z_\varepsilon)\|_{H^s}$. Celles-ci proviennent d'une part d'estimations d'énergie utilisant les équations pour $(b_\varepsilon, z_\varepsilon)$, et d'autre part de l'analyse (de Fourier) des propriétés de décroissance de l'opérateur de semi-groupe associé au système (6).

En raison de la restriction sur s, les résultats obtenus ne permettent pas de considérer des phases trop fortement oscillantes. Les données initiales typiquement autorisées sont plutôt de la forme

$$\Psi_\varepsilon(0) = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b^0} \exp(i\varphi^0),$$

où $(b^0, \varphi^0) \in H^{s+1} \times H^{s+1}$ est indépendant de ε, pour lesquelles l'énergie de Ginzburg-Landau

$$E_\varepsilon(\Psi_\varepsilon(0)) \simeq C\|(b^0, \nabla\varphi^0)\|_{L^2}^2 = \mathcal{O}_\varepsilon(1).$$

Dans cette situation, les résultats précédents nous assurent que

$$\|(b_\varepsilon, z_\varepsilon)\|_{L^2(H^s)} \lesssim \sqrt{\kappa_\varepsilon}\|(b^0, \varphi^0)\|_{H^{s+1}}.$$

En particulier, il existe $t_\varepsilon = \mathcal{O}(\kappa_\varepsilon |\ln \kappa_\varepsilon|)$ tel que $\|(b_\varepsilon, z_\varepsilon)(t_\varepsilon)\|_{H^s}$ tende vers zéro, ce qui signifie que la totalité de l'énergie $E_\varepsilon(\Psi_\varepsilon)$ s'est dissipée en temps $t_\varepsilon = o_\varepsilon(1)$. Lorsque $\kappa_\varepsilon = |\ln \varepsilon|^{-1}$, on retrouve ainsi le temps de dissipation fourni par le résultat de très bonne préparation instantanée de [76].

L'implémentation de ces résultats pour des données peu préparées dans le cadre de la dynamique des vortex pour $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$ constitue un problème envisagé mais non encore traité.

Cette thèse donnera lieu aux articles : [21], écrit en collaboration avec C. Lacave, dont sont issus les Chapitres 1 et 2 ; [70], dont est extrait le Chapitre 6 ; et [71], dont est extrait le Chapitre 7.

Première partie

Le système mixte Euler-points vortex

Chapitre 1

Solutions lagrangiennes et solutions eulériennes

Ce chapitre est inclus dans [21], écrit en collaboration avec C. Lacave.

1.1 Introduction.

Dans ce chapitre, nous étudions le lien entre les formulations eulérienne et lagrangienne pour le système mixte Euler-points vortex.

Dans l'introduction générale, nous avons donné un énoncé assez flou de ces notions, en voici à présent des définitions précises.

Afin d'alléger les notations, nous noterons ici, ainsi que dans les chapitres qui suivent, ω au lieu de ω_r la partie bornée du tourbillon et $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ sa trace à $t = 0$. Rappelons que les $z_1(t), \dots, z_l(t)$ désignent les trajectoires des points vortex et que le noyau de Biot-Savart K est la fonction

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Nous commençons par définir les *solutions lagrangiennes* du système mixte de la façon suivante.

Définition 1.1 (Solutions lagrangiennes). *Soit $T > 0$. Soient $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $z_{1,0}, \dots z_{l,0}$ des points de $\mathbb{R}^2$ deux à deux distincts affectés des intensités $d_1, \dots, d_l \in \mathbb{R}$. Nous dirons que $(\omega, z_1, \dots, z_l, \phi)$ est une solution lagrangienne au système mixte Euler-points vortex sur $[0,T]$ avec donnée initiale $(\omega_0, z_{1,0}, \dots, z_{l,0})$ si $\omega \in L^\infty([0,T], L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$, la vitesse $v = K * \omega \in C([0,T] \times \mathbb{R}^2)$, les points $z_i \in C^1([0,T], \mathbb{R}^2)$, le flot $\phi(\cdot, x) \in C^1([0,T], \mathbb{R}^2)$ pour tout $x \neq z_{i,0}$ satisfont pour tout $t \in [0,T]$ à*

$$\begin{cases} v = K * \omega, \\ \dot{z}_i(t) = v(t, z_i(t)) + \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{l} d_j K\left(z_i(t) - z_j(t)\right), \quad z_i(0) = z_{i,0}, \\ \dot{\phi}_t(x) = v(t, \phi_t(x)) + \displaystyle\sum_{j=1}^{l} d_j K\left(\phi_t(x) - z_j(t)\right), \\ \phi_0(x) = x, \ x \neq z_{j,0}, \\ \omega(t, \phi_t(x)) = \omega_0(x), \end{cases} \tag{L}$$

où $\phi_t = \phi(t, \cdot)$. En outre, pour tout $t \in [0,T]$, le flot $\phi_t : \mathbb{R}^2 \setminus \cup_{i=1}^l \{z_{i,0}\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \cup_{i=1}^l \{z_i(t)\}$ est un homéomorphisme qui préserve la mesure de Lebesgue, c'est-à-dire :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\phi_t(x))\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, dx, \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^2).$$

On peut également définir une notion de solutions faibles de l'EDP sans faire intervenir la notion de trajectoire. Nous les qualifierons de *solutions eulériennes.*

Définition 1.2 (Solutions eulériennes). *Soient $T > 0$, $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $z_{1,0}, \dots z_{l,0}$ des points de $\mathbb{R}^2$ deux à deux distincts affectés des intensités $d_1, \dots, d_l \in \mathbb{R}$.*

Nous dirons que $(\omega, z_1, \dots, z_l)$ est solution eulérienne au système mixte Euler-points vortex sur $[0,T]$ avec donnée initiale $(\omega_0, z_{1,0}, \dots, z_{l,0})$ si les conditions 1. et 2. suivantes sont satisfaites.

1. *On a* $\omega \in L^\infty\big([0,T], L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)\big)$ *et* $z_i \in C([0,T],\mathbb{R}^2)$ *pour* $i = 1,\dots,l$.
2. *Soient* $v = K * \omega$ *et* $H_i(t,x) = K(x - z_i(t))$ *pour* $i = 1,\dots,l$. *Le système*

$$\begin{cases} \partial_t\omega + \operatorname{div}\big((v + \sum_{i=1}^{l} d_i H_i)\omega\big) = 0, \quad \omega(0) = \omega_0, \\ \dot z_i(t) = v\big(t, z_i(t)\big) + \sum_{j\neq i} d_j H_j\big(t, z_i(t)\big), \\ z_i(0) = z_{i,0}, \quad i = 1,\dots,l, \end{cases} \tag{E}$$

est vérifié au sens des distributions, c'est-à-dire au sens suivant[22]*. Pour toute fonction test* $\varphi \in C_c^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^2)$,

$$-\int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x)\varphi(0,x)\,dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \omega\big[\partial_t\varphi + (v + \sum_{i=1}^{l} d_i H_i)\cdot\nabla\varphi\big]\,ds\,dx,$$

et pour[23] $t \in [0,T]$

$$z_i(t) = z_{i,0} + \int_0^t \big[v(s, z_i(s)) + \sum_{j\neq i} d_j H_j(s, z_i(s))\big]\,ds, \quad i = 1,\dots,l.$$

Nous établirons ici l'équivalence des deux formulations précédentes. La première partie de ce chapitre sera consacrée à la démonstration du

Théorème 1.1. *Soient* $T > 0$ *et* $(\omega, z_1,\dots,z_l,\phi)$ *une solution lagrangienne du système mixte sur* $[0,T]$. *Alors* $(\omega, z_1,\dots,z_l)$ *est solution eulérienne sur* $[0,T]$.

La réciproque de ce résultat est moins immédiate, nous devrons faire appel à la théorie relative aux équations de transport linéaires. À la Section 1.4, nous établirons le principal résultat de ce chapitre, à savoir le

Théorème 1.2. *Soient* $T > 0$ *et* $(\omega, z_1,\dots,z_l)$ *une solution eulérienne sur* $[0,T]$. *Alors*

1. $\omega \in C([0,T], L^p)$ *pour tout* $1 < p < +\infty$.
2. $v = K * \omega \in C([0,T]\times\mathbb{R}^2) \cap L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)$.
3. *Les trajectoires* $t \mapsto z_i(t)$ *sont* C^1 *et satisfont à l'EDO*

$$\dot z_i(t) = v(t, z_i(t)) + \sum_{j\neq i} d_j H_j(t, z_i(t)), \quad \forall t \in [0,T].$$

4. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \cup_{i=1}^{l}\{z_{i,0}\}$, *il existe un unique flot* $\phi_t(x)$ *qui est* C^1 *en temps et tel que* $(\omega, v, z_1,\dots,z_l,\phi)$ *est une solution lagrangienne du système mixte.*

Remarque 1.1. *Nous verrons que* v *appartient de surcroît à l'ensemble* $L^\infty\big([0,T], \mathrm{QL}(\mathbb{R}^2)\big)$ *des fonctions quasi-Lipschitz uniformément en temps qui sera défini au Paragraphe 1.2.2.*

---

[22] En vertu de la Proposition 1.2 ci-après, le champ $v = K * \omega$ appartient à $L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)$. D'un autre côté, H_i appartient à $L^1_{\mathrm{loc}}([0,T]\times\mathbb{R}^2)$, cette définition a donc bien un sens.

[23] Nous savons d'après la Proposition 1.2 et la Proposition 2.4 qui sera démontrée au Chapitre 2 que $v(t)$ est définie pour tout temps et est continue en la variable d'espace.

Notations. Les définitions précédentes ne prennent leur sens que tant que les points vortex n'entrent pas en collision. Autrement dit, si $(\omega, z_1, \ldots, z_l)$ désigne une solution en l'un ou l'autre sens sur $[0,T]$, il existe $t \in [0,T] \mapsto d(t)$ strictement positive et continue pour laquelle

$$|z_i(t) - z_j(t)| \geq d(t) > 0, \quad t \in [0,T], \quad i \neq j = 1, \ldots, l. \tag{1.1}$$

Dans ce chapitre, on utilisera fréquemment la fonction de troncature $\chi_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ régulière, *radiale*, vérifiant

$$\chi_0 \equiv 0 \text{ sur } B(0, \frac{1}{2}), \quad \chi_0 \equiv 1 \text{ sur } B(0,1)^c, \quad 0 \leq \chi_0 \leq 1. \tag{1.2}$$

Pour un petit paramètre $0 < \delta < 1$, on introduit $\chi_\delta = \chi_0\left(\delta^{-1}\cdot\right)$ et les fonctions

$$\chi_\delta^i(t,x) = \chi_\delta\left(x - z_i(t)\right), \quad i = 1, \ldots, l, \quad \text{et} \quad \zeta_\delta(t,x) = \prod_{i=1}^{l} \chi_\delta^i(t,x). \tag{1.3}$$

Enfin, on notera

$$u = v + H = v + \sum_{i=1}^{l} d_i H_i = K * \Big(\omega + \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{z_i}\Big)$$

le champ de vitesse total. Celui-ci se compose d'une partie bornée et quasi-Lipschitz v et des champs H_i, très fortement singuliers aux points z_i et réguliers en dehors.

Clairement, la multiplication d'une fonction test quelconque par ζ_δ procure une fonction régulière dont le support n'intersecte pas les points z_i. En formulation faible, ce procédé revient à remplacer H par une troncature H_δ, c'est-à-dire à ignorer les singularités. Dans les démonstrations qui suivent, nous établirons dans un premier temps des identités pour les champs $v + H_\delta$. Dans un second temps, nous ferons tendre δ vers zéro en exploitant l'identité

$$H_i(t,x) \cdot \nabla \chi_\delta^i(t,x) \equiv 0, \tag{1.4}$$

qui découle du caractère radial de χ_δ et de la forme explicite de H_i, et le fait que

$$\chi_\delta \to 1 \text{ presque partout} \quad \text{et} \quad \|\nabla \chi_\delta\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \to 0. \tag{1.5}$$

1.2 Quelques propriétés du noyau de Biot-Savart.

On rassemble pour commencer quelques propriétés bien connues du noyau de Biot-Savart

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}, \quad (x_1, x_2)^\perp = (-x_2, x_1)$$

auxquelles nous ferons fréquemment appel dans les chapitres à venir.

1.2.1 À propos du noyau de Biot-Savart.

On commence par des estimations ponctuelles pour K.

Lemme 1.1.

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$*, on a*
$$|K(x)| = \frac{1}{2\pi|x|}.$$
En particulier, $K \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ *pour tout* $1 \leq p < 2$ *et* $K \in L^q(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega)$ *pour tout* $2 < q \leq +\infty$*, pour tout ouvert* Ω *contenant* 0*.*
2. *Le champ* K *est localement lipschitzien en dehors de l'origine : pour tous* $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$*, on a*
$$|K(x) - K(y)| = \frac{1}{2\pi}\frac{|x-y|}{|x||y|}.$$

Les estimations ci-dessus mènent au résultat suivant, dont la démonstration figure par exemple dans [23].

Lemme 1.2 ([23], Lemme 8.1)**.** *Il existe une constante* C *telle que pour tout* $f \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$*, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^2} |K(x-z) - K(y-z)||f(z)|\, dz \leq C(\|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^\infty})\varphi\big(|x-y|\big), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2,$$

où φ *est la fonction continue, positive et croissante définie par*

$$\varphi(z) = \begin{cases} z(1 - \ln(z)) & si \quad 0 \leq z < 1 \\ 1 & si \quad z \geq 1. \end{cases}$$

Enfin, on utilisera les simples observations suivantes :

Lemme 1.3. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$*, on a*

$$K(x) \cdot x = 0, \quad K(x) = -K(-x).$$

1.2.2 Propriétés de la convolution par le noyau de Biot-Savart.

Les estimations classiques de potentiel pour les intégrales singulières fournissent l'inégalité suivante, appelée usuellement inégalité de Calderón-Zygmund.

Proposition 1.1 ([14] ou [23], Lemme 8.3)**.** *Soient* $f \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ *et* $g = K * f$*, de sorte que* $\operatorname{rot} g = f$ *et* $\operatorname{div} g = 0$*. Pour tout* $1 < p < +\infty$*, on a*

$$\|\nabla g\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C(p)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)},$$

où $C(p)$ *est une constante dépendant de* p*. Lorsque* $p \geq 2$*, on peut supposer que* $C(p) = Cp$*, où* C *est une constante universelle.*

Enfin, les estimations pour K du paragraphe précédent entraînent le résultat suivant.

Proposition 1.2 ([23], [29]). *Soient $f \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $g = K * f$. Alors*

$$\|g\|_{L^\infty} \leq C\big(\|f\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^1}\big), \tag{1.6}$$

où C est une constante universelle. De plus, g est quasi-Lipschitz, au sens où

$$|g(x) - g(y)| \leq C(\|f\|_{L^\infty}, \|f\|_{L^1})\, \varphi\big(|x-y|\big),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^2, \tag{1.7}$$

où $C(\|f\|_{L^\infty}, \|f\|_{L^1})$ dépend de $\|f\|_{L^\infty}$ et $\|f\|_{L^1}$ et φ est la fonction continue, positive et croissante définie au Lemme 1.2.

Il s'avère que la majoration (1.6) a lieu même si f n'est pas uniformément bornée. En effet, l'inégalité de Hölder nous donne immédiatement la

Proposition 1.3. *Soit $p > 2$. Pour $f \in L^p \cap L^1(\mathbb{R}^2)$ et $g = K * f$, on a*

$$\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C(p) \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^{1-\frac{p'}{2}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^{\frac{p'}{2}},$$

où $C(p)$ dépend uniquement de p et p' est l'exposant conjugué de p.

Remarque 1.2. *Une estimation similaire a encore lieu pour $f \in L^p \cap L^q(\mathbb{R}^2)$ avec $p > 2$ et $q < 2$.*

Par la suite, $\mathrm{QL}(\mathbb{R}^2)$ désignera l'ensemble des fonctions g quasi-Lipschitz de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire pour lesquelles

$$|g(x) - g(y)| \leq C\varphi(|x-y|), \qquad x, y \in \mathbb{R}^2,$$

pour une constante C. On notera par ailleurs $L^\infty\big(\mathbb{R}, \mathrm{QL}(\mathbb{R}^2)\big)$ l'ensemble des fonctions $v = v(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ satisfaisant à

$$|v(t,x) - v(t,y)| \leq C\varphi(|x-y|), \qquad x, y \in \mathbb{R}^2, \quad \text{p.p. } t \in \mathbb{R},$$

pour une constante C indépendante de t.

Dans les situations envisagées, nous aurons toujours $f = \omega(t)$ et $g = K *_x \omega(t) = v(t)$, où $\omega \in L^\infty([0,T], L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^2))$ et $2 < p \leq +\infty$. Les estimations des Propositions 1.2 et 1.3 seront donc uniformes en temps.

1.3 Démonstration du Théorème 1.1.

Afin d'établir le Théorème 1.1, on souhaite démontrer que

$$\partial_t \omega + \operatorname{div}\big((v + \sum_{i=1}^{l} d_i H_i)\omega\big) = 0 \tag{1.8}$$

au sens des distributions sur $[0,T] \times \mathbb{R}^2$.

Soit $\varphi(t,x)$ une fonction test, définissons

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \omega(t,y)\varphi(t,y)\, dy.$$

Puisque ϕ_t préserve la mesure de Lebesgue et ω est transporté par ce flot, nous avons par changement de variables

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x)\varphi(t,\phi_t(x))\,dx.$$

Pour tous t,s, au vu de l'équation différentielle vérifiée par $\phi_t(x)$ et en utilisant à nouveau que ϕ préserve la mesure de Lebesgue, on a

$$\begin{aligned} f(t)-f(s) &= \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x)\int_s^t \frac{d}{d\tau}\varphi(\tau,\phi_\tau(x))\,d\tau\,dx \\ &= \int_s^t\int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x)\big(\partial_t\varphi + u\cdot\nabla\varphi\big)(\tau,\phi_\tau(x))\,dx\,d\tau \\ &= \int_s^t\int_{\mathbb{R}^2} \omega(t,y)\big(\partial_t\varphi + u\cdot\nabla\varphi\big)(\tau,y)\,dy\,d\tau. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé ici le fait que $\omega(\partial_t\varphi + u\cdot\nabla\varphi) \in L^1\big([0,T],L^1(\mathbb{R}^2)\big)$ pour appliquer la formule de Fubini. On obtient donc que $f \in \mathrm{AC}([0,T])$ et (1.8) est vérifiée.

Nous allons en fait démontrer que $f\in C^1([0,T])$ et par conséquent f vérifie l'identité précédente sous forme dérivée pour tout t.

Soit $\varphi=\varphi(t,x)$ une fonction test. Pour $0<\delta<1$, on pose

$$\varphi_\delta(t,x) \equiv \varphi(t,x)\zeta_\delta(t,x),$$

où la fonction de troncature ζ_δ est définie dans l'introduction, et on considère

$$f_\delta(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \omega(t,y)\varphi_\delta(t,y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^2}\omega_0(x)\varphi_\delta(t,\phi_t(x))\,dx.$$

Puisque $\varphi_\delta(t)\equiv 0$ sur chaque $B\left(z_i(t),\delta/2\right)$, le théorème (licite ici) de dérivation sous l'intégrale implique que $f_\delta\in C^1([0,T])$ et

$$f'_\delta(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \omega\,(\partial_t\varphi_\delta + u\cdot\nabla\varphi_\delta)(t,x)\,dx. \tag{1.9}$$

D'autre part, on a

$$\partial_t\varphi_\delta + u\cdot\nabla\varphi_\delta = \zeta_\delta(\partial_t\varphi+u\cdot\nabla\varphi) + \varphi(\partial_t\zeta_\delta + u\cdot\nabla\zeta_\delta).$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned} \partial_t\zeta_\delta + u\cdot\nabla\zeta_\delta &= \sum_{i=1}^{l}\Big(\prod_{j\neq i}\chi_\delta^j\big(-\dot z_i + v + \sum_{k=1}^{l} d_k H_k\big)\cdot\nabla\chi_\delta^i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{l}\Big(\prod_{j\neq i}\chi_\delta^j\big(-\dot z_i + v + \sum_{k\neq i} d_k H_k\big)\cdot\nabla\chi_\delta^i\Big), \end{aligned}$$

où la seconde égalité est due à l'identité (1.4). Soit $d=\min_{[0,T]} d(t)>0$ la distance minimale entre les vortex sur $[0,T]$, où $d(t)$ est définie par (1.1). Dès que $\delta\le d/2$, on a pour $x\in\operatorname{supp}(\nabla\chi_\delta^i)$

$$|x-z_k(t)| \ge |z_i(t)-z_k(t)| - \delta \ge \frac{d}{2}, \quad \forall k\neq i.$$

Au vu de cette minoration, des équations différentielles vérifiées par les points vortex et de la Proposition 1.2 pour v, on trouve alors

$$|(\partial_t\zeta_\delta + u\cdot\nabla\zeta_\delta)(t,x)| \leq C\sum_{i=1}^{l}|\nabla\chi_\delta^i(t,x)|,$$

où C ne dépend pas de δ, d'où

$$\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_{\mathbb{R}^2}\omega\varphi\left(\partial_t\zeta_\delta + u\cdot\nabla\zeta_\delta\right)(t,x)\,dx\Big| \leq C\|\varphi\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^\infty}\|\nabla\chi_\delta\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Or, d'après (1.5), le membre de droite tend vers zéro lorsque δ tend vers zéro.

Par ailleurs, on vérifie que

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}^2}\omega\zeta_\delta\big(\partial_t\varphi + u\cdot\nabla\varphi\big)(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^2}\omega(\partial_t\varphi + u\cdot\nabla\varphi)(t,x)\,dx$$

uniformément par rapport à $t\in[0,T]$, d'où le fait que

$$\lim_{\delta\to 0} f_\delta'(t) = \int_{\mathbb{R}^2}\omega(\partial_t\varphi + u\cdot\nabla\varphi)\,dx$$

uniformément par rapport à $t\in[0,T]$. Mais f_δ converge (uniformément) vers f sur $[0,T]$. Nous en déduisons que $f\in C^1([0,T])$. □

1.4 Démonstration du Théorème 1.2.

Pour démontrer le Théorème 1.2, nous adopterons les notions et techniques introduites par DiPerna et Lions [12] pour les équations de transport linéaires, dont notamment la notion de solution renormalisée.

1.4.1 Propriété de renormalisation.

Dans un premier temps, on considère l'équation (E) de la Définition 1.2 comme une équation de transport *linéaire* pour laquelle les trajectoires des vortex et le champ de vitesse $u = v + \sum d_i H_i$ sont *fixés*.

Les Propositions 1.1 et 1.2 assurent que la vitesse $v = K * \omega$ vérifie

$$v \in L^\infty\left([0,T]\times\mathbb{R}^2\right)\cap L^\infty\big([0,T], W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)\big)\cap L^\infty\left([0,T],\mathrm{QL}(\mathbb{R}^2)\right).$$

Notre objectif est d'établir pour (E) la propriété de renormalisation correspondante. En résumé, il s'agit de démontrer que si ω est solution de l'équation de transport linéaire, il en va de même pour toutes les fonctions $\beta(\omega)$, lorsque β est une fonction régulière convenable. Compte tenu des résultats de DiPerna et Lions et de la régularité de v, ceci est bien le cas lorsqu'il n'y a pas de points vortex. Afin d'étendre cette propriété à notre situation, on utilisera tout d'abord la régularité de $H = \sum d_i H_i$ en dehors des vortex puis la forme explicite de ce champ.

Le point de départ dans [12] et [11] pour établir la propriété de renormalisation est l'étude des équations vérifiées par les fonctions régularisées[24]

$$\omega_\varepsilon = \rho_\varepsilon *_x \omega, \qquad \omega_{\varepsilon,\eta} = \omega_\varepsilon *_t \theta_\eta,$$

où ρ_ε et θ_η sont des approximations de l'unité sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ respectivement. Pour $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$, on pose $f_\eta = f *_x \rho_\eta *_t \theta_\eta$. Enfin, on introduit l'ensemble des trajectoires

$$\Sigma = \{\big(t, z_i(t)\big),\ t \in [0,T],\ i = 1, \dots, l\}$$

et l'on note $\mathcal{G}$ son complémentaire dans $[0,T] \times \mathbb{R}^2$.

Grâce à la régularité de type Sobolev pour le champ v et à la régularité de H sur $\mathcal{G}$, on obtient le

Lemme 1.4 (Commutateurs)**.** *Soit* $(\omega, z_1, \dots, z_l)$ *une solution eulérienne de* (E) *sur* $[0,T]$. *Alors l'égalité suivante a lieu au sens des distributions sur* $[0,T] \times \mathbb{R}^2$

$$\partial_t \omega_{\varepsilon,\eta} + u_\eta \cdot \nabla \omega_{\varepsilon,\eta} = r_{\varepsilon,\eta}, \tag{1.10}$$

où le terme de reste $r_{\varepsilon,\eta}$ *est défini par*

$$r_{\varepsilon,\eta} = u_\eta \cdot \nabla \omega_{\varepsilon,\eta} - (u \cdot \nabla \omega)_{\varepsilon,\eta}$$

et vérifie

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \big(\lim_{\eta \to 0} r_{\varepsilon,\eta} \big) = 0 \qquad \textit{dans } L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{G}).$$

Démonstration. Soit K un compact de $\mathcal{G}$, alors il existe $c(K) > 0$ tel que

$$\inf_{(\tau,x) \in K} |x - z_i(\tau)| \geq c(K), \qquad \forall i = 1, \dots, l.$$

On considère la fonction

$$\chi(t,x) = \prod_{i=1}^{l} \chi_0 \left(\frac{x - z_i(t)}{c(K)/2} \right),$$

où χ_0 est la fonction de troncature définie dans l'introduction. Puisque χ vaut identiquement 1 dans un voisinage de K, on a, pour η et ε suffisamment petits par rapport à $c(K)$,

$$r_{\varepsilon,\eta} = (u\chi)_\eta \cdot \nabla \omega_{\varepsilon,\eta} - ((u\chi) \cdot \nabla \omega)_{\varepsilon,\eta} \quad \text{dans } K.$$

D'une part, le champ v et par conséquent aussi χv, appartiennent à $L^\infty_{\mathrm{loc}}\big([0,T], W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)\big)$. D'autre part, grâce à l'inégalité

$$|H(\tau,x) - H(\tau,y)| \leq C|x-y| \sum_{i=1}^{l} |x - z_i(\tau)|^{-1} |y - z_i(\tau)|^{-1} \leq c(K)|x-y|,$$

on voit que $H\chi$ également appartient à $L^\infty_{\mathrm{loc}}\big([0,T], W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)\big)$. Il ne reste alors plus qu'à invoquer le Lemme II.1 de [12] (ou encore le Lemme 1 de [11]) pour obtenir

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \big(\lim_{\eta \to 0} r_{\varepsilon,\eta} \big) = 0 \qquad \text{dans } L^1(K),$$

ce qui achève la preuve du lemme. □

[24] On pose $\omega \equiv 0$ en dehors de $[0,T]$.

La deuxième étape consiste à utiliser la forme explicite de H.

Lemme 1.5 (Renormalisation). *Soit* $(\omega, z_1, \dots, z_l)$ *une solution de* (E) *sur* $[0,T]$. *Soit* $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1 *telle que*

$$|\beta'(z)| \le C(1 + |z|^p), \qquad \forall z \in \mathbb{R},$$

pour un certain $p \ge 0$. *Alors pour toute fonction test* $\varphi \in C_c^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)$, *on a*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi \beta(\omega)\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \beta(\omega)(\partial_t \varphi + u \cdot \nabla \varphi)\, dx \text{ dans } L^1([0,T]).$$

Démonstration. Celle-ci repose sur l'équation (1.10) établie précédemment pour la fonction régularisée $\omega_{\varepsilon,\eta}$. Comme cette dernière est régulière, (1.10) a lieu ponctuellement sur $[0,T] \times \mathbb{R}^2$. En la multipliant par $\beta'(\omega_{\varepsilon,\eta})$, on obtient

$$\partial_t \beta(\omega_{\varepsilon,\eta}) + u_\eta \cdot \nabla \beta(\omega_{\varepsilon,\eta}) = \beta'(\omega_{\varepsilon,\eta}) r_{\varepsilon,\eta} \qquad \text{dans } [0,T] \times \mathbb{R}^2. \tag{1.11}$$

On procède alors comme dans la démonstration du Théorème 1.1. Plus précisément, soient une fonction test $\varphi \in C_c^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)$, $\delta > 0$ et

$$\varphi_\delta(t,x) = \zeta_\delta(t,x)\varphi(t,x),$$

où ζ_δ est la fonction de troncature définie en introduction de ce chapitre. Puisque les trajectoires $z_i(t)$ ne sont pas C^1, une régularisation supplémentaire est nécessaire pour que φ_δ soit C^1 en temps. On considère donc des approximations régulières $z_i^n(t)$ des $z_i(t)$ et on pose

$$\zeta_\delta^n(t,x) = \prod_{j=1}^{l} \chi_\delta(x - z_i^n(t)), \quad \varphi_\delta^n = \zeta_\delta^n \varphi.$$

Notons que puisque les trajectoires des z_i sont lipschitziennes, de constantes de Lipschitz bornées par $\|v\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)} + Cd^{-1}$, où d est la distance minimale entre les points vortex sur $[0,T]$, les approximations z_i^n peuvent être choisies de sorte que

$$\max_{i=1,\dots,l} \max_{t\in[0,T]} |z_i(t) - z_i^n(t)| \le \frac{C}{n}, \qquad \max_{i=1,\dots,l} \max_{t\in[0,T]} |\dot{z}_i{}^n(t)| \le C,$$

où C ne dépend que de $\|v\|_{L^\infty}$ et de d. Quitte à choisir n suffisamment grand par rapport à δ, ces estimations impliquent que les fonctions φ_δ et φ_δ^n sont à support inclus dans un compact fixe de $\mathcal{G}$.

Ensuite, en multipliant (1.11) par φ_δ^n, puis en intégrant en espace, on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_\delta^n(t) \beta(\omega_{\varepsilon,\eta}(t))\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \beta'(\omega_{\varepsilon,\eta}) r_{\varepsilon,\eta} \varphi_\delta^n\, dx + \int_{\mathbb{R}^2} \beta(\omega_{\varepsilon,\eta})(\partial_t \varphi_\delta^n + u_\eta \cdot \nabla \varphi_\delta^n)\, dx.$$

Puisque φ_δ^n est à support inclus dans $\mathcal{G}$, le Lemme 1.4 ainsi que les hypothèses de croissance sur β et les bornes uniformes dans L^∞ pour $\omega_{\varepsilon,\eta}$ entraînent que pour δ et n fixés, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\lim_{\eta\to 0} \int_{\mathbb{R}^2} \beta'(\omega_{\varepsilon,\eta}) r_{\varepsilon,\eta} \varphi_\delta^n\, dx \right) = 0 \qquad \text{dans } L^1([0,T]). \tag{1.12}$$

Par ailleurs, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\lim_{\eta\to 0} \|\omega_{\varepsilon,\eta} - \omega\|_{L^1([0,T],L^1(\mathbb{R}^2))} \right) = 0.$$

Enfin, le terme $\partial_t\varphi_\delta^n + u_\eta \cdot \nabla\varphi_\delta^n$ est uniformément borné en η, ε. On obtient donc à δ et n fixés

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\lim_{\eta\to 0}\int_{\mathbb{R}^2}\beta(\omega_{\varepsilon,\eta})(\partial_t\varphi_\delta^n + u_\eta\cdot\nabla\varphi_\delta^n)\,dx\Big) = \int_{\mathbb{R}^2}\beta(\omega)(\partial_t\varphi_\delta^n + u\cdot\nabla\varphi_\delta^n)\,dx \quad \text{dans } L^1([0,T])\,. \tag{1.13}$$

Enfin, puisque

$$\lim_{\eta,\varepsilon\to 0}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2}\beta(\omega_{\varepsilon,\eta})\varphi_\delta^n\,dx = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2}\beta(\omega)\varphi_\delta^n\,dx$$

au sens des distributions sur $[0,T]$, on obtient d'après (1.12) et (1.13)

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2}\beta(\omega)\varphi_\delta^n\,dx = \int_{\mathbb{R}^2}\beta(\omega)(\partial_t\varphi_\delta^n + u\cdot\nabla\varphi_\delta^n)\,dx \qquad \text{dans } L^1([0,T]).$$

On fait d'abord tendre n vers l'infini à δ fixé, puis δ vers zéro. Le membre de gauche dans l'égalité précédente converge alors vers $\frac{d}{dt}\int\beta(\omega)\varphi$ au sens des distributions sur $[0,T]$.

D'autre part, on a

$$\partial_t\varphi_\delta^n + u\cdot\nabla\varphi_\delta^n = \zeta_\delta^n(\partial_t\varphi + u\cdot\nabla\varphi) + \varphi(\partial_t\zeta_\delta^n + u\cdot\nabla\zeta_\delta^n).$$

Quand n tend vers l'infini à δ fixé, le premier terme du membre de droite converge vers $\zeta_\delta(\partial_t\varphi + u\cdot\nabla\varphi)$ dans L^1_{loc}. Par ailleurs, de même que dans la démonstration du Théorème 1.1, on voit que

$$\begin{aligned}
\partial_t\zeta_\delta^n + u\cdot\nabla\zeta_\delta^n &= \sum_{i=1}^{l}\prod_{j\neq i}\chi_\delta(x - z_j^n)\Big(-\dot z_i^n + v + \sum_{k=1}^{l} d_k K(x - z_k)\Big)\cdot\nabla\chi_\delta(x - z_i^n)\\
&= \sum_{i=1}^{l}\prod_{j\neq i}\chi_\delta(x - z_j^n)\Big(-\dot z_i^n + v + \sum_{k\neq i} d_k K(x - z_k)\Big)\cdot\nabla\chi_\delta(x - z_i^n)\\
&+ \sum_{i=1}^{l}\prod_{j\neq i}\chi_\delta(x - z_j^n)\big(d_i K(x - z_i)\cdot\nabla\chi_\delta(x - z_i^n)\big).
\end{aligned}$$

Remarquons que puisque z_i^n converge uniformément vers z_i et puisque χ_δ est radiale, le second membre du terme de droite converge vers zéro lorsque n tend vers l'infini :

$$K(x - z_i)\cdot\nabla\chi_\delta(x - z_i^n) \to K(x - z_i)\cdot\nabla\chi_\delta(x - z_i) \equiv 0 \quad \text{dans } L^1_{\text{loc}}\big([0,T]\times\mathbb{R}^2\big)\,.$$

En utilisant par ailleurs les bornes uniformes de $\dot z_i^n$ et de v pour estimer le second terme, on obtient ainsi pour tout $t\in[0,T]$

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\big|\partial_t\zeta_\delta^n + u\cdot\nabla\zeta_\delta^n\big|\,dx \le C\sum_{i=1}^{l}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\chi_\delta(x - z_i(t))|\,dx.$$

Finalement, les bornes uniformes pour v et $\beta(\omega)$ nous donnent

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^2}\beta(\omega)(\partial_t\varphi_\delta + u\cdot\nabla\varphi_\delta)\,dx - \int_{\mathbb{R}^2}\beta(\omega)\zeta_\delta(\partial_t\varphi + u\cdot\nabla\varphi)\,dx\Big| \le C\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\chi_\delta|\,dx.$$

En faisant tendre δ vers zéro et en utilisant (1.5), on aboutit à

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2}\beta(\omega)\varphi\,dx=\int_{\mathbb{R}^2}\beta(\omega)(\partial_t\varphi+u\cdot\nabla\varphi)\,dx$$

au sens des distributions sur $[0,T]$. Enfin, puisque le membre de droite est intégrable sur $[0,T]$, l'égalité précédente a lieu presque partout dans $[0,T]$ et le lemme est démontré. $\square$

Remarque 1.3.

1. *Le Lemme 1.5 est encore valide pour des fonctions φ régulières, bornées et dont les premières dérivées en temps et en espace sont bornées. Dans ce cas, il faut imposer la condition supplémentaire $\beta(0)=0$, de sorte que $\beta(\omega)$ est intégrable. On établit cette extension en approchant φ par des fonctions régulières à support compact φ_n, pour lesquelles le Lemme 1.5 s'applique.*
2. *Soit $1\le p<+\infty$. En approchant la fonction $\beta(t)\equiv|t|^p$ par des fonctions régulières et en choisissant $\varphi\equiv 1$ dans le Lemme 1.5, on obtient que si ω est une solution eulérienne de* (E) *alors $t\mapsto\|\omega(t)\|_{L^p}$ est constante (ceci est clairement le cas pour les solutions lagrangiennes, puisque le flot conserve la mesure de Lebesgue). En particulier, ceci entraîne que*

$$\|\omega(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}+\|\omega(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\equiv\|\omega_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}+\|\omega_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)},$$

et nous noterons dans la suite $\|\omega_0\|$ cette dernière quantité.

1.4.2 Fin de la démonstration du Théorème 1.2.

Dans ce paragraphe, on complète la démonstration du Théorème 1.2 à l'aide de la propriété de renormalisation établie au paragraphe précédent ainsi que du Théorème 1.1.

Commençons par démontrer l'énoncé 1. Puisque $\omega\in L^\infty\big([0,T],L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^2)\big)$, il suffit par un argument d'interpolation de prouver que $\omega\in C\big([0,T],L^2(\mathbb{R}^2)\big)$. Or, on a $\partial_t\omega=-\mathrm{div}\,(u\omega)$ au sens des distributions, avec $\omega\in L^\infty\big([0,T],L^\infty(\mathbb{R}^2)\big)$ et $u\in L^\infty\big([0,T],L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)\big)$ pour tout $q<2$. Ceci implique que $\partial_t\omega$ appartient à $L^1\big([0,T],W^{-1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)\big)$. Par conséquent, ω est dans $C\big([0,T],W^{-1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)\big)$. Puisque, en outre, $t\mapsto\|\omega(t)\|_{L^2}$ est continue en vertu de la Remarque 1.3, on en déduit que $\omega\in C\big([0,T],L^2(\mathbb{R}^2)-\mathrm{w}\big)$, où $C(L^2-\mathrm{w})$ désigne l'espace des fonctions du temps à valeurs dans L^2, continues pour la topologie faible sur L^2. En combinant ce fait avec la continuité de $t\mapsto\|\omega(t)\|_{L^2}$, on obtient $\omega\in C\big([0,T],L^2(\mathbb{R}^2)\big)$.

On établit ensuite l'assertion 2, qui implique l'assertion 3. En vertu de la Proposition 1.2, il nous suffit d'établir la continuité en temps pour la vitesse. Pour tous t,s dans $[0,T]$, on a

$$|v(t,x)-v(s,x)|\le C\int_{|x-y|\le 1}\frac{|\omega(t,y)-\omega(s,y)|}{|x-y|}\,dy+C\int_{|x-y|\ge 1}\frac{|\omega(t,y)-\omega(s,y)|}{|x-y|}\,dy.$$

Soient $2<q<+\infty$ et $1<p<2$. En appliquant l'inégalité de Hölder à chaque membre du terme de droite, on trouve

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2}|v(t,x)-v(s,x)|\le C\|\omega(t)-\omega(s)\|_{L^q}+C\|\omega(t)-\omega(s)\|_{L^p}.$$

En tenant compte du fait que $v \in L^\infty\big([0,T], \mathrm{QL}(\mathbb{R}^2)\big)$, on déduit alors de 1. et de l'estimation précédente que v est continue en temps et en espace.

Puisque K est borné et lipschitzien en dehors de zéro, on peut par conséquent appliquer l'extension du théorème de Cauchy-Lipschitz à la classe des fonctions vérifiant 2. (voir par exemple le Lemme 3.2 dans [29]) : pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \cup_{i=1}^l \{z_{i,0}\}$, il existe un temps $0 < T(x) \leq T$ et une unique trajectoire $\phi_t(x)$ de classe C^1 sur $[0, T(x))$ tels que

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) = v\big(t, \phi_t(x)\big) + \sum_{i=1}^{l} d_i K\big(\phi_t(x) - z_i(t)\big).$$

De plus, on sait d'après [28] que ϕ_t vérifie sur $[0, T(x))$ l'estimation

$$\min_{i=1,\ldots,l} |\phi_t(x) - z_i(t)| \geq F\Big(t, \|\omega_0\|, \min_{i=1,\ldots,l} |x - z_{i,0}|, \min_{i\neq j} |z_i(t) - z_j(t)|, \max_i |z_i(t)|\Big) > 0, \tag{1.14}$$

où F est une fonction continue strictement positive de plusieurs variables. Ceci implique en particulier que le flot est bien défini tant que les trajectoires des points vortex existent et donc que $T(x) = T$.

Le fait que ϕ_t est un homéomorphisme est standard lorsqu'il n'y a pas de point vortex (c'est-à-dire lorsque ϕ_t est défini sur tout l'espace). Dans le cas présent, on peut établir que ϕ_t est un homéomorphisme : $\mathbb{R}^2 \setminus \cup_{i=1}^l \{z_{i,0}\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \cup_{i=1}^l \{z_i(t)\}$ en utilisant à nouveau (1.14).

Il nous reste encore à établir l'invariance de la mesure de Lebesgue par ϕ_t. On montre dans un premier temps que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\phi_t(x))\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, dx, \quad \forall f \in C_c(\mathbb{R}^2). \tag{1.15}$$

À cet effet, on considère $(v_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ une suite de fonctions régulières, à divergence nulle, approchant v. Pour chaque ε, soit aussi K_ε un champ borné et lipschitzien sur $\mathbb{R}^2$, à divergence nulle et tel que $K_\varepsilon = K$ en dehors de la boule $B(0,\varepsilon)$. Notons $z_{1,\varepsilon}, \ldots, z_{l,\varepsilon}$ et ϕ_ε les flots associés à $v_\varepsilon + \sum_{j\neq i} d_j K_\varepsilon(\cdot - z_{j,\varepsilon})$ et $v_\varepsilon + \sum d_j K_\varepsilon(\cdot - z_{j,\varepsilon})$ respectivement. À l'aide de (1.1) et (1.14), on vérifie sans peine qu'à sous-suite près, $z_{\varepsilon,i}$ converge vers z_i uniformément sur $[0,T]$ et ϕ_ε vers ϕ sur les compacts de $[0,T] \times \mathbb{R}^2 \setminus \cup_{i=1}^l \{z_{i,0}\}$. Par ailleurs, puisque $v_\varepsilon(t) + \sum d_i K_\varepsilon(\cdot - z_{\varepsilon,i}(t))$ est régulière et à divergence nulle pour chaque ε, le théorème de Liouville (voir par exemple l'Annexe 1.1 dans [29]) assure que $\phi_\varepsilon(t)$ préserve la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ pour tout $t \in [0,T]$. En faisant tendre ε vers zéro, on obtient donc (1.15).

Finalement, d'après (1.15) et le théorème de représentation de Riesz, les mesures dx et $(\phi_t)_\# dx$ coïncident sur les boréliens de $\mathbb{R}^2$, de sorte que (1.15) a lieu pour $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Enfin, dans le but d'établir que ω est transporté par le flot, on définit

$$\overline{\omega} = \omega_0 \circ \phi_t^{-1} \in L^\infty\left([0,T], L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)\right),$$

de sorte que $\overline{\omega}(0,x) = \omega_0(x)$. D'après le Théorème 1.1, $\overline{\omega}$ est une solution faible de l'équation de transport linéaire $\partial_t \overline{\omega} + u \cdot \nabla \overline{\omega} = 0$. Le second point de la Remarque 1.3 appliqué à $\omega - \overline{\omega}$ stipule que

$$\|\omega(t) - \overline{\omega}(t)\|_{L^2} \equiv 0, \quad t \in [0,T],$$

d'où le fait que $\omega(t,x) = \overline{\omega}(t,x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^2$. Ceci achève la démonstration du Théorème 1.2. $\square$

Remarque 1.4. *Le premier point du Théorème 1.2 assure que l'équation énoncée dans le Lemme 1.5 a lieu sous la forme plus forte suivante : pour toute fonction β admissible et pour toute fonction test φ, on a pour tout t*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(t,x)\beta(\omega(t,x))\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(0,x)\beta(\omega(0,x))\,dx = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \beta(\omega)(\partial_t\varphi + u\cdot\nabla\varphi)\,dx\,ds.$$

Chapitre 2

Unicité pour le système mixte Euler-points vortex

Ce chapitre est inclus dans [21], écrit en collaboration avec C. Lacave.

2.1 Introduction.

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'unicité pour le système mixte Euler-points vortex. Ce problème, à notre connaissance ouvert dans le cas général, est résolu dans la situation où la vorticité ω_0 est à support initialement disjoint des points vortex [28], ainsi que dans la situation où ω_0 est lipschitzienne et constante dans un voisinage de ces points [37].

Nous aborderons ici le cas d'une vorticité $\omega_0 \in L^\infty_c(\mathbb{R}^2)$ initialement constante dans un voisinage des points vortex, et nous établirons le résultat suivant.

Théorème 2.1. *Soient* $\omega_0 \in L^\infty_c(\mathbb{R}^2)$ *et* $z_{1,0}, \dots, z_{l,0} \in \mathbb{R}^2$ *deux à deux distincts. Notons* d_0 *la distance minimale entre ces points. Supposons qu'il existe* $0 < R_0 < d_0$ *et des réels* $\alpha_i \in \mathbb{R}$ *tels que* ω_0 *est constant égal à* α_i *au voisinage de chaque vortex :*

$$\omega_0 \equiv \alpha_i \ \ dans \ \ B(z_{i,0}, R_0), \quad \forall i = 1, \dots, l. \tag{$\mathcal{P}_0$}$$

Alors pour tout $T > 0$*, il existe une unique solution au système mixte Euler-points vortex sur* $[0, T]$ *avec ces données initiales.*

À l'aune des résultats du Chapitre 1, qui établissent l'équivalence entre les formulations eulérienne et lagrangienne pour le système mixte, nous pourrons dorénavant utiliser l'une ou l'autre formulation sans ambiguïté.

Comme nous le verrons au cours de la preuve du Théorème 2.1, l'hypothèse $(\mathcal{P}_0)$ joue un rôle important dans l'étude de la partie singulière du champ de vitesse. Le point de départ de la démonstration du Théorème 2.1, qui fait l'objet de la Section 2.2, consiste à vérifier que le tourbillon reste constant dans un voisinage de chaque point vortex à temps positif $(\mathcal{P}_t)$. Dans le cas d'un seul point vortex, la preuve est assez directe, il suffit d'utiliser la notion de trajectoire (voir [28]). Afin de traiter le cas plus délicat de plusieurs points, nous délaisserons l'approche particulaire et passerons en formulation faible.

Dans le cadre des équations d'Euler classiques, l'unicité de la solution (u, ω) avec $\omega \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty)$ est le plus souvent établie dans la littérature (voir par exemple [23]) au moyen d'estimations d'énergie portant sur la différence des vitesses. Aussi en proposons-nous à la Section 2.3 une généralisation au problème mixte. En premier lieu, ceci nécessite de déterminer l'équation satisfaite par le champ de vitesse $v = K * \omega$ engendré par la partie bornée du tourbillon. Nous disposons à cet égard d'un résultat d'Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes [18] pour le cas d'un seul point vortex fixe, que l'on peut transposer sans peine au cas de plusieurs points.

Pour deux solutions $(\omega_1, z_1, \dots, z_l)$ et $(\omega_2, \zeta_1, \dots, \zeta_l)$, on introduit, par analogie avec le cadre classique, la quantité

$$r(t) = \sum_{i=1}^{l} |z_i(t) - \zeta_i(t)|^2 + \|K * (\omega_1 - \omega_2)(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

À l'aide des équations pour les vitesses $v_1 = K * \omega_1$ et $v_2 = K * \omega_2$ établies auparavant, on établit pour $r(t)$ une inégalité de type Gronwall menant à $r \equiv 0$. La propriété $(\mathcal{P}_t)$

intervient ici de manière cruciale, elle nous permet d'établir des estimations spécifiques pour la différence des vitesses au voisinage des points vortex.

Ce chapitre est finalement complété par la Section 2.4, dans laquelle nous exposons une démonstration alternative du Théorème 2.1 reposant davantage sur une approche lagrangienne. Cette approche nous fut suggérée par un des rapporteurs de l'article [21]. La formulation eulérienne s'avère néanmoins utile, notamment pour établir $(\mathcal{P}_t)$ à temps positif (voir à ce sujet la Remarque 2.1).

2.2 La vorticité reste constante autour des points vortex.

Dans cette section, on utilise le Lemme 1.5 du Chapitre 1 pour établir la

Proposition 2.1. *Soit $(\omega, z_1, \dots, z_l)$ une solution eulérienne du système mixte Euler-points vortex sur $[0,T]$ avec donnée initiale $(\omega_0, z_{1,0}, \dots, z_{l,0})$ vérifiant les hypothèses du Théorème 2.1.*

Soient $d(t)$ la distance minimale entre les vortex $z_i(t)$ et $d = \min_{[0,T]} d(t) > 0$.

Il existe une fonction strictement positive $t \mapsto R(t)$, continue, décroissante et dépendant uniquement de t, R_0, $||\omega_0||$ et d, vérifiant $R(0) \leq R_0$ et telle que

$$\omega(t) \equiv \alpha_i \quad dans \quad B\left(z_i(t), R(t)\right), \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall i = 1, \dots, l. \tag{$\mathcal{P}_t$}$$

Démonstration. Fixons $i \in \{1, \dots, l\}$, posons $\beta(t) = (t - \alpha_i)^2$ et appliquons le Lemme 1.5 avec ce choix de β. Soit $\Phi \in C_c^\infty\left([0,T] \times \mathbb{R}^2\right)$. D'après la Remarque 1.4, on a pour $t \in [0,T]$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(t,x)(\omega - \alpha_i)^2(t,x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(0,x)(\omega - \alpha_i)^2(0,x)\, dx$$
$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (\omega - \alpha_i)^2 (\partial_t \Phi + u \cdot \nabla \Phi)\, dx\, ds,$$

où l'on rappelle que

$$u = v + \sum_{i=1}^{l} d_i H_i = K * (\omega + \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{z_i}).$$

On choisit alors une fonction test Φ centrée autour du vortex $z_i(t)$ pour tout temps. Plus précisément, considérons une fonction positive décroissante Φ_0 sur $\mathbb{R}_+$, telle que $\Phi_0(r) \equiv 1$ pour $|r| \leq 1/2$ et $\Phi_0(r) \equiv 0$ pour $|r| \geq 1$. Soit

$$\Phi(t,x) = \Phi_0\left(\frac{|x - z_i(t)|}{R(t)}\right),$$

où $t \mapsto R(t)$ désigne une fonction C^1, positive, décroissante, vérifiant

$$R(0) \leq \min(R_0, \frac{d}{2}),$$

qui sera déterminée plus tard. Pour que Φ soit de classe C^1 en temps, la trajectoire $z_i(t)$ devrait être régularisée exactement comme dans la démonstration du Lemme 1.5, mais nous omettons les détails pour plus de lisibilité. La propriété $(\mathcal{P}_0)$ garantit que pour ce choix de Φ,

$$(\omega_0(x) - \alpha_i)^2 \Phi(0,x) \equiv 0.$$

Ensuite, un calcul donne
$$\nabla\Phi = \frac{x-z_i}{|x-z_i|}\frac{\Phi_0'}{R(t)}$$
et
$$\partial_t\Phi = -\frac{R'(t)}{R^2(t)}|x-z_i|\Phi_0' + \frac{\dot{z}_i\cdot(z_i-x)}{|x-z_i|}\frac{\Phi_0'}{R(t)}.$$
Par ailleurs, puisque Φ est radiale autour de z_i, on a
$$u\cdot\nabla\Phi = (v+\sum_{j=1}^{l} d_jH_j)\cdot\nabla\Phi = (v+\sum_{j\neq i} d_jH_j)\cdot\nabla\Phi,$$
par conséquent
$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2}\Phi(t,x)(\omega-\alpha_i)^2(t,x)\,dx\\ &\quad= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}(\omega-\alpha_i)^2\frac{\Phi_0'(\frac{|x-z_i|}{R})}{R}\Big(\big[v(x)+\sum_{j\neq i}d_jH_j(x)-\dot{z}_i\big]\cdot\frac{(x-z_i)}{|x-z_i|}-\frac{R'}{R}|x-z_i|\Big)\,dx\,ds.\end{aligned}$$
Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $R_0\leq 1$, de sorte que $R(s)\leq 1$ pour tout $s\geq 0$. Pour $s\in[0,t]$, le support de l'intégrant est la couronne
$$C_i(s)=\{x\,:\,\frac{R(s)}{2}\leq |x-z_i(s)|\leq R(s)\}.$$
Puisque $\Phi_0'(\frac{|x-z_i(s)|}{R(s)})$ est négatif sur $C_i(s)$ et puisque R est décroissante, on obtient
$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}(\omega-\alpha_i)^2\frac{\Phi_0'(\frac{|x-z_i|}{R})}{R}\Big(\big[v(x)+\sum_{j\neq i}d_jH_j(x)-\dot{z}_i\big]\cdot\frac{(x-z_i)}{|x-z_i|}-\frac{R'}{R}|x-z_i|\Big)\,dx\,ds\\ &\leq \int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}(\omega-\alpha_i)^2\frac{|\Phi_0'|(\frac{|x-z_i|}{R})}{R}\Big(|v(x)-v(z_i)|+\sum_{j\neq i}|d_j|\big|H_j(x)-H_j(z_i)\big|+\frac{R'}{2}\Big)\,dx\,ds.\end{aligned}$$
Ensuite, comme $R(s)\leq R(0)\leq d/2$, on a
$$|x-z_j(s)|\geq\frac{d}{2},\quad j\neq i,\quad \forall x\in C_i(s).$$
En particulier, les champs $H_j(s,\cdot)$ sont lipschitziens sur $C_i(s)$ pour j différent de i. Ainsi, en exploitant le Lemme 1.1 pour les H_j, ainsi que le fait que $v\in L^\infty\big([0,T],\mathrm{QL}(\mathbb{R}^2)\big)$, on déduit du calcul précédent que
$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2}\Phi(t,x)(\omega-\alpha_i)^2(t,x)\,dx\\ &\leq \int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}(\omega-\alpha_i)^2\frac{|\Phi_0'|(\frac{|x-z_i|}{R})}{R}\left(C\varphi(|x-z_i|)+C|x-z_i|+\frac{R'}{2}\right)\,dx\,ds\\ &\leq \int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}(\omega-\alpha_i)^2\frac{|\Phi_0'|(\frac{|x-z_i|}{R})}{R}\left(CR(1-\ln R)+\frac{R'}{2}\right)\,dx\,ds,\end{aligned}$$

où C ne dépend que de $\|\omega_0\|$ et de d. Dans la dernière inégalité, la croissance de φ, ainsi que le fait que $\tau \leq \varphi(\tau)$ pour $\tau \leq 1$, ont été utilisés. Finalement, le choix de

$$R(t) = \exp(1 - (1 - \ln R(0))e^{2Ct})$$

nous conduit à

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(t,x)(\omega - \alpha_i)^2(t,x)\,dx \leq 0,$$

et par conséquent $\omega(t) \equiv \alpha_i$ sur $B\left(z_i(t), R(t)\right)$. □

Comme conséquence de la Proposition 2.1 vient le

Corollaire 2.1. *Soient $(\omega_1, z_1, \ldots, z_l)$ et $(\omega_2, \zeta_1, \ldots, \zeta_l)$ deux solutions du système mixte Euler-points vortex sur $[0,T]$ avec donnée initiale $(\omega_0, z_{1,0}, \ldots, z_{l,0})$ vérifiant les hypothèses du Théorème 2.1. Soient*

$$d_1 = \min_{t\in[0,T]} \min_{i\neq j} |z_i(t) - z_j(t)|, \quad d_2 = \min_{t\in[0,T]} \min_{i\neq j} |\zeta_i(t) - \zeta_j(t)|, \quad \delta = \min(d_1, d_2).$$

Par ailleurs, soient $R_1(t)$ et $R_2(t)$ les rayons trouvés à la Proposition 2.1 pour chacune des solutions et

$$\rho(t) = \min(R_1(t), R_2(t)).$$

Il existe un temps $0 < T_C \leq T$, dépendant uniquement de $\|\omega_0\|$, R_0 et δ, tel que pour chaque $i = 1, \ldots, l$,

$$\omega_1(t) \equiv \omega_2(t) \equiv \alpha_i \qquad \textit{dans} \quad B\big(y_i(t), \frac{\rho(t)}{2}\big), \qquad \forall t \in [0, T_C],$$

où $y_i(t)$ est le milieu du segment $[z_i(t), \zeta_i(t)]$. De plus, on a

$$z_i(t), \zeta_i(t) \in B\big(y_i(t), \frac{\rho(t)}{8}\big).$$

Démonstration. Soit $\rho_m = \min_{t\in[0,T]} \rho(t) > 0$. En appliquant la Proposition 1.2 à v_1 et v_2 et la première partie du Lemme 1.1 à $H_j(z_i)$ et $H_j(\zeta_i)$, on obtient

$$|z_i(t) - \zeta_i(t)| \leq C(\|\omega_0\| + \delta^{-1})t \leq \overline{C}t,$$

où $\overline{C}$ ne dépend que de ω_0 et δ. Le choix de $T_C = \min(\rho_m(4\overline{C})^{-1}, T)$ nous donne

$$|z_i(t) - \zeta_i(t)| \leq \frac{\rho_m}{4} \leq \frac{\rho(t)}{4}, \qquad \forall t \in [0, T_C],$$

d'où

$$B\big(y_i(t), \frac{\rho(t)}{2}\big) \subset B\left(z_i(t), \rho(t)\right) \cap B\left(\zeta_i(t), \rho(t)\right).$$

On conclut à l'aide de la Proposition 2.1. □

Le résultat suivant, qui conclut ce paragraphe, assure que le tourbillon issu d'un tourbillon initial à support compact reste à support compact à temps positif. Comme nous l'avions mentionné dans l'introduction générale, il s'agit d'une propriété bien connue dans le cas des équations d'Euler classiques.

Proposition 2.2. *Soient $\omega_0 \in L^\infty_c(\mathbb{R}^2)$, $z_{1,0}, \dots, z_{l,0} \in \mathbb{R}^2$ deux à deux distincts et $(\omega, z_1, \dots, z_l)$ une solution du système mixte Euler-points vortex sur $[0,T]$ avec donnée initiale $(\omega_0, z_{1,0}, \dots, z_{l,0})$. Notons $d(t) > 0$ la distance minimale entre les vortex $z_i(t)$ et $d = \min_{[0,T]} d(t) > 0$. Alors il existe Λ ne dépendant que de d, $\|\omega_0\|$, $|z_{i,0}|$ et de la taille de* $\operatorname{supp}\omega_0$ *tel que*

$$\operatorname{supp}\omega(t) \subset B(0, \Lambda(1+t)), \quad \forall t \in [0,T].$$

Démonstration. Nous en présentons ici une version similaire à celle de la Proposition 2.1, qui repose sur la formulation eulérienne du système mixte[25]. Ici, les C_k, $k = 1, 2$ désigneront des constantes ne dépendant que des données initiales et de d.

Tout d'abord, le fait que $v \in L^\infty$ entraîne que les vortex vérifient $|z_i(t)| \leq C_1(1+t)$ sur $[0,T]$. Soit Λ_0 tel que $\operatorname{supp}\omega_0$ soit inclus dans $B(0,\Lambda_0)$. Choisissons $\beta(t) = t^2$ dans le Lemme 1.5 et $\Phi(t,x) = 1 - \Phi_0\big(\frac{x}{\Lambda(1+t)}\big)$, où Φ_0 est la fonction de troncature introduite dans la démonstration de la Proposition 2.1, et où Λ satisfait à $\Lambda \geq 2\Lambda_0$ et $\Lambda \geq 4C_1$. On a

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(t,x)\omega^2(t,x)\,dx \\
&\quad = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \omega^2 \frac{-\Phi_0'\left(\frac{|x|}{\Lambda(1+t)}\right)}{\Lambda(1+t)} \Big([v(x) + \sum_{i=1}^l d_i H_i(x)] \cdot \frac{x}{|x|} - \frac{\Lambda|x|}{\Lambda(1+t)} \Big)\,dx\,ds \\
&\quad \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \omega^2 \frac{|\Phi_0'|\left(\frac{|x|}{\Lambda(1+t)}\right)}{\Lambda(1+t)} \Big(\|v\|_\infty + \sum_{i=1}^l |d_i| C_1^{-1} - \frac{\Lambda}{2} \Big)\,dx\,ds \\
&\quad \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \omega^2 \frac{|\Phi_0'|\left(\frac{|x|}{\Lambda(1+t)}\right)}{\Lambda(1+t)} \big(C_2 - \frac{\Lambda}{2} \big)\,dx\,ds,
\end{aligned}$$

car pour x appartenant au support de l'intégrant on a $|x| \geq \Lambda(1+s)/2$ et donc $|x - z_i(s)| \geq C_1(1+s) \geq C_1$. On voit alors que le terme du membre de droite est négatif dès que le nombre Λ est suffisamment grand. Plus précisément, lorsque $\Lambda \geq 2C_2$ l'inégalité précédente implique que $\Phi(t,x)\omega^2(t,x) \equiv 0$; par choix de Φ, ceci signifie que $\omega(t,x) = 0$ lorsque $|x| \geq \Lambda(1+t)$, et la conclusion s'ensuit. $\square$

Remarque 2.1. *Lorsque $l = 1$ (un seul point vortex), il est plus direct de démontrer les Propositions 2.1 et 2.2 avec les trajectoires (voir [28]), mais dans le cas $l \geq 2$ le point de vue eulérien, qui permet l'emploi de fonctions test localisées, semble plus approprié.*

2.3 Une approche eulérienne.

2.3.1 Formulation pour le champ de vitesse.

Nous nous focalisons à présent sur l'équation satisfaite par le champ de vitesse $K * \omega$ lorsque $(\omega, z_1, \dots, z_l)$ est une solution du système mixte Euler-points vortex. Dans tout ce paragraphe, on considère une donnée initiale $\omega_0 \in L^\infty$ à support compact et des points $z_{1,0}, \dots, z_{l,0}$, *qui ne satisfont pas nécessairement à la condition* $(\mathcal{P}_0)$. Nous avons la

[25] Il est possible également d'utiliser les trajectoires.

Proposition 2.3. *Soit* $(\omega, z_1, \ldots, z_l)$ *une solution de* (E) *sur* $[0,T]$. *Alors la vitesse* $v = K * \omega$ *vérifie au sens des distributions sur* $[0,T] \times \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v + \operatorname{div}(v \otimes H + H \otimes v) - \sum_{i=1}^{l} d_i v(z_i(t))^{\perp} \delta_{z_i(t)} = -\nabla p \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v(x,0) = K * \omega_0, \end{cases}$$

où $\delta_{z_i(t)}$ *désigne la masse de Dirac centrée en* $z_i(t)$ *et*

$$H(t,x) \equiv \sum_{i=1}^{l} d_i H_i(t,x) = \sum_{i=1}^{l} d_i K\left(x - z_i(t)\right).$$

Démonstration. L'équation pour v est établie dans [18] dans le cas d'un unique point vortex fixé à l'origine, on peut en fait aisément la transposer à notre cadre. Sans entrer dans les détails, expliquons comment cette équation est obtenue dans [18]. Pour établir l'existence de la distribution ∇p, il suffit de montrer que

$$\operatorname{rot}\left[\partial_t v + v \cdot \nabla v + \operatorname{div}(v \otimes H + H \otimes v) - \sum_{i=1}^{l} d_i v(z_i(t))^{\perp} \delta_{z_i(t)}\right] = 0$$

au sens des distributions. Puisque $\operatorname{rot} v = \omega$, ceci est équivalent à établir que

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{rot}(\partial_t v + v \cdot \nabla v) + \operatorname{rot}[\operatorname{div}(v \otimes H + H \otimes v) - \sum_{i=1}^{l} d_i v(z_i)^{\perp} \delta_{z_i}] \\ &= \partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega + \operatorname{rot}[\operatorname{div}(v \otimes H + H \otimes v) - \sum_{i=1}^{l} d_i v(z_i)^{\perp} \delta_{z_i}] \\ &= -\operatorname{div}(H\omega) + \operatorname{rot}[\operatorname{div}(v \otimes H + H \otimes v) - \sum_{i=1}^{l} d_i v(z_i)^{\perp} \delta_{z_i}], \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\partial_t \omega + \operatorname{div}((v+H)\omega) = 0$ au sens des distributions.

Par ailleurs, un calcul exploitant le fait que $\operatorname{div} v = \operatorname{div} H = 0$ nous donne

$$\operatorname{rot}\operatorname{div}(v \otimes H + H \otimes v) = \operatorname{div}(H \operatorname{rot} v + v \operatorname{rot} H)$$

au sens des distributions. En tenant compte du fait que $\operatorname{rot} v = \omega$ et $\operatorname{rot} H = \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{z_i}$, on obtient finalement

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\operatorname{div}(v \otimes H + H \otimes v) \\ &\quad = \operatorname{div}(H\omega) + \operatorname{div}[\sum_{i=1}^{l} d_i v(z_i) \delta_{z_i}] = \operatorname{div}(H\omega) + \operatorname{rot}[\sum_{i=1}^{l} d_i v(z_i)^{\perp} \delta_{z_i}], \end{aligned}$$

et la conclusion s'ensuit. □

Dans la suite, nous noterons $W^{1,4}_{\sigma}(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions de $W^{1,4}(\mathbb{R}^2)$ à divergence nulle et $W^{-1,4/3}_{\sigma}(\mathbb{R}^2)$ son espace dual.

Étant données deux solutions $(\omega_1, z_1, \ldots, z_l)$ et $(\omega_2, \zeta_1, \ldots, \zeta_l)$ au système mixte Euler-points vortex sur $[0,T]$ avec donnée initiale $(\omega_0, z_{1,0}, \ldots, z_{l,0})$, on définit la différence des vitesses

$$\tilde{v} = K * (\omega_1 - \omega_2) = v_1 - v_2.$$

On déduit de la Proposition 2.3 que $\tilde{v}$ satisfait aux propriétés suivantes.

Proposition 2.4. *On a*

$$\tilde{v} \in L^2\left([0,T], W^{1,4}_\sigma(\mathbb{R}^2)\right), \quad \partial_t \tilde{v} \in L^2\big([0,T], W_\sigma^{-1,\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)\big).$$

En outre, on a $\tilde{v} \in C\left([0,T], L^2(\mathbb{R}^2)\right)$ *et*

$$\|\tilde{v}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 2\int_0^t \langle \partial_t \tilde{v}, \tilde{v}\rangle_{W_\sigma^{-1,4/3}, W_\sigma^{1,4}}\, ds, \qquad \forall t \in [0,T].$$

Démonstration. Posons $\tilde{\omega} = \omega_1 - \omega_2$, de sorte que $\tilde{v} = K * \tilde{\omega}$. Puisque les ω_i sont transportés par un flot qui préserve la mesure de Lebesgue, les intégrales de ω_1 et ω_2 sont conservées. Il en résulte que $\int \tilde{\omega}(t) \equiv 0$ pour tout $t \in [0,T]$. D'autre part, $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ - et par conséquent aussi $\tilde{\omega}(t)$ - sont à support compact d'après la Proposition 2.2. On en déduit que $\tilde{v}(t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ pour tout t (voir par exemple [23] pour davantage de détails). En utilisant de surcroît le fait que $\|\omega_i\|_{L^1(\mathbb{R}^2)\cap L^\infty(\mathbb{R}^2)} \in L^\infty([0,T])$, on obtient même

$$\tilde{v} \in L^\infty\left([0,T], L^2(\mathbb{R}^2)\right). \tag{2.1}$$

Afin d'établir la première assertion de la proposition, on applique la Proposition 2.3 à $(v_1, z_1, \ldots, z_l)$ et $(v_2, \zeta_1, \ldots, \zeta_l)$. On notera

$$H^1 = \sum_{j=1}^{l} d_j K\left(\cdot - z_i\right), \quad H^2 = \sum_{j=1}^{l} d_j K\left(\cdot - \zeta_i\right).$$

Tout d'abord, on déduit des Propositions 1.1 et 1.2 que pour $i=1$ ou $i=2$, $v_i = K * \omega_i$ appartient à $L^\infty\left([0,T]\times\mathbb{R}^2\right)$ et que les gradients ∇v_i appartiennent à $L^\infty\left([0,T], L^4(\mathbb{R}^2)\right)$. Par ailleurs, comme ω_i est à support compact, on a lorsque $|x|$ est suffisamment grand

$$|v_i(t,x)| \leq \frac{C}{|x|}\int_{\mathbb{R}^2} |\omega_i(t,y)|\, dy,$$

d'où le fait que v_i appartient à $L^\infty\left([0,T], L^p(\mathbb{R}^2)\right)$ pour tout $p > 2$. En particulier, il s'ensuit que

$$v_i \in L^\infty\left([0,T], W^{1,4}(\mathbb{R}^2)\right)$$

et aussi que $v_i \otimes v_i$ appartient à $L^\infty\left([0,T], L^{4/3}(\mathbb{R}^2)\right)$. Comme v_i est à divergence nulle, on a en fait $v_i \cdot \nabla v_i = \operatorname{div}(v_i \otimes v_i)$, d'où $v_i \cdot \nabla v_i \in L^2\big([0,T], W^{-1,\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)\big)$.

De plus, $v_i \otimes H^i$ appartient à $L^\infty\big([0,T], L^{4/3}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)\big)$, alors qu'à l'infini H^i et v_i sont bornés par $C|x|^{-1}$ qui appartient à $L^{8/3}(\mathbb{R}^2 \setminus B)$ pour tout ouvert B contenant 0. Ceci nous mène à

$$\operatorname{div}(v_i \otimes H^i),\ \operatorname{div}(H^i \otimes v_i) \in L^2\big([0,T], W^{-1,\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)\big).$$

Puis, on déduit de l'injection continue de $W^{1,4}(\mathbb{R}^2)$ dans $C_0(\mathbb{R}^2)$ que δ_{z_j} (respectivement δ_{ζ_j}) appartient à $L^2\big([0,T], W^{-1,\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)\big)$ pour chaque j. Ainsi, $v_1\delta_{z_j}$ (respectivement $v_2\delta_{\zeta_j}$) appartient à $L^2\big([0,T], W^{-1,\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)\big)$.

En invoquant la Proposition 2.3, on obtient finalement pour $i = 1, 2$:

$$\langle \partial_t v_i, \Phi \rangle = \langle \partial_t v_i - \nabla p_i, \Phi \rangle \leq C \|\Phi\|_{L^2(W^{1,4}_\sigma)}$$

pour tout champ de vecteurs Φ régulier à divergence nulle. Ceci implique que

$$\partial_t v_i \in L^2\big([0, T], W^{-1,4/3}_\sigma(\mathbb{R}^2)\big), \quad i = 1, 2,$$

et la même propriété a lieu pour $\partial_t \tilde{v}$. Puisque $\tilde{v}$ appartient à $L^2\big([0, T], W^{1,4}_\sigma(\mathbb{R}^2)\big)$, il s'ensuit de (2.1) et de [38] (Lemme 1.2, Chapitre III) que $\tilde{v}$ coïncide presque partout avec une fonction continue de $[0, T]$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ et on a au sens des distributions sur $[0, T]$

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 2 \langle \partial_t \tilde{v}, \tilde{v} \rangle_{W^{-1,4/3}_\sigma, W^{1,4}_\sigma}.$$

En utilisant finalement le fait que $\tilde{v}(0) = 0$, nous parvenons à la conclusion. □

2.3.2 Une inégalité de Gronwall.

Dans ce paragraphe, nous complétons la démonstration du Théorème 2.1 en nous appuyant sur les propriétés présentées précédemment. On considère à nouveau deux solutions (ω_1, z) et (ω_2, ζ) avec même donnée initiale $(\omega_0, z_{i,0})$, et on suppose cette fois que ω_0 vérifie l'hypothèse $(\mathcal{P}_0)$. Rappelons que

$$H^1 = \sum_{i=1}^{l} d_i K(\cdot - z_i) = \sum_{i=1}^{l} d_i H^1_i, \quad H^2 = \sum_{i=1}^{l} d_i K(\cdot - \zeta_i) = \sum_{i=1}^{l} d_i H^2_i, \quad \tilde{H} = H^1 - H^2.$$

D'après la Proposition 2.4, la quantité

$$r(t) \equiv \|\tilde{v}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \sum_{i=1}^{l} |z_i(t) - \zeta_i(t)|^2$$

est bien définie et continue sur $[0, T]$. On montrera que r est identiquement nulle à l'aide d'une inégalité de type Gronwall.

Soient

$$\rho_m = \min_{t \in [0,T]} \rho(t) = \rho(T), \quad \rho_M = \max_{t \in [0,T]} \rho(t) = \rho(0),$$

où $\rho(t)$ est la fonction décroissante déterminée au Corollaire 2.1. Puisque $r(0) = 0$, on peut trouver $0 < T_0 \leq T_C$ tel que

$$r(t) \leq 1, \qquad \forall t \leq T_0,$$

où T_C est le temps introduit au Corollaire 2.1. Rappelons que T_C est d'ores et déjà entièrement déterminé par R_0, δ, $\|\omega_0\|$ et T. On choisit T_0 maximal avec la propriété ci-dessus.

Dans un premier temps, on tire parti du fait que les tourbillons ω_i sont constants autour des points vortex pour établir des estimations de régularité elliptique pour le champ $\tilde{v}(t)$ au voisinage de ces points. Pour $i = 1, \ldots, l$, $y_i(t)$ désigne le milieu du segment reliant $z_i(t)$ et $\zeta_i(t)$.

Lemme 2.1. *Pour tout* $0 \leq t \leq T_C$*,* $\tilde{v}(t,\cdot)$ *est harmonique dans chaque* $B(y_i(t), \rho(t)/2)$*. Par conséquent, on a les estimations*

$$\|\tilde{v}(t,\cdot)\|_{L^\infty(B(y_i(t),\rho(t)/4))} \leq C\|\tilde{v}(t,\cdot)\|_{L^2},$$
$$\|\nabla\tilde{v}(t,\cdot)\|_{L^\infty(B(y_i(t),\rho(t)/4))} \leq C\|\tilde{v}(t,\cdot)\|_{L^2},$$

où la constante C *ne dépend que de* $\rho(t)$*.*

Démonstration. On pose ici $\rho = \rho(t)$. D'après le Corollaire 2.1, on sait que $\mathrm{rot}\, v_1 = \mathrm{rot}\, v_2 = \alpha_i$ dans chaque $B_i = B(y_i(t), \rho/2)$, d'où $\mathrm{rot}\,\tilde{v} = \mathrm{div}\,\tilde{v} = 0$. Ceci entraîne que $\tilde{v}$ est harmonique sur chaque B_i. Les estimations en norme L^∞ pour $\tilde{v}$ et $\nabla\tilde{v}$ découlent alors de résultats classiques de régularité elliptique ; on pourra par exemple se rapporter au Chapitre 2.1 de [14]. □

L'inégalité de Gronwall satisfaite par $r(t)$ est fournie par la

Proposition 2.5. *Pour tout* $t \in [0, T_0]$*, pour tout* $p \geq 2$*, on a*

$$r(t) \leq C\int_0^t \left[\varphi(r(\tau)) + p\, r(\tau)^{1-\frac{1}{p}}\right] d\tau,$$

où la constante C *dépend uniquement de* $\|\omega_0\|$*,* ρ_m *et* ρ_M *et la fonction* φ *est définie par la Proposition 1.2.*

Démonstration. Celle-ci s'articule en plusieurs étapes. Dans toute cette démonstration, C désignera une constante ne dépendant que de $\|\omega_0\|$, ρ_m et ρ_M.

Première étape. Le champ de vitesse vérifie

$$\|\tilde{v}(t,.)\|_{L^2}^2 \leq C\int_0^t \left[r(\tau) + \sqrt{r(\tau)}\varphi(\sqrt{r(\tau)}) + p\, r(\tau)^{1-1/p}\right] d\tau, \quad \forall p \geq 2, \qquad \forall 0 \leq t \leq T_C.$$

En effet, les deux équations fournies par la Proposition 2.3 pour (v_1, z) et (v_2, ζ) nous donnent

$$\begin{aligned}\partial_t\tilde{v} + \tilde{v}\cdot\nabla v_1 + v_2\cdot\nabla\tilde{v} + \mathrm{div}\,(\tilde{v}\otimes H^1 + v_2\otimes\tilde{H} + H^1\otimes\tilde{v} + \tilde{H}\otimes v_2)&\\ - \sum_{i=1}^{l} d_i[v_1(z_i)^\perp\cdot\delta_{z_i} - v_2(\zeta_i)^\perp\cdot\delta_{\zeta_i}] = -\nabla\tilde{p}.&\end{aligned} \tag{2.2}$$

Comme fonctions test dans (2.2), on considère des fonctions régulières $\Phi_n \in C_c^\infty\left([0,T]\times\mathbb{R}^2\right)$ à divergence nulle qui convergent vers $\tilde{v}$ dans $L^2\left([0,T], W^{1,4}(\mathbb{R}^2)\right)$. À la limite n tend vers l'infini, on a pour $t \in [0,T]$

$$\int_0^t \langle\partial_t\tilde{v}, \Phi_n\rangle_{W_\sigma^{-1,4/3}, W_\sigma^{1,4}}\, d\tau \to \int_0^t \langle\partial_t\tilde{v}, \tilde{v}\rangle_{W_\sigma^{-1,4/3}, W_\sigma^{1,4}}\, d\tau,$$

et on obtient ensuite les limites des autres termes grâce aux différentes bornes pour les normes de v_1 et v_2 établies dans la preuve de la Proposition 2.4. On trouve alors

$$\frac{1}{2}\|\tilde{v}(t,.)\|_{L^2}^2 = I + J + \sum_{i=1}^{l} d_i K_i,$$

avec

$$
\begin{aligned}
I &= -\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{v} \cdot (\tilde{v} \cdot \nabla v_1 + v_2 \cdot \nabla \tilde{v})\, dx\, d\tau, \\
J &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (\tilde{v} \otimes H^1 + v_2 \otimes \tilde{H} + H^1 \otimes \tilde{v} + \tilde{H} \otimes v_2) : \nabla \tilde{v}\, dx\, d\tau, \\
K_i &= \int_0^t [v_1(z_i)^{\perp} \cdot \tilde{v}(z_i) - v_2(\zeta_i)^{\perp} \cdot \tilde{v}(\zeta_i)]\, d\tau.
\end{aligned}
$$

L'étape suivante consiste à estimer chacun de ces termes pour des temps $0 \le t \le T_C$. Afin d'alléger les notations, on pose $B_i = B(y_i(t), \rho(t)/4)$.

Estimation de I. Observons d'une part que

$$
\int_{\mathbb{R}^2} (v_2 \cdot \nabla \tilde{v}) \cdot \tilde{v}\, dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} v_2 \cdot \nabla |\tilde{v}|^2\, dx = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{v}|^2 \mathrm{div}\, v_2\, dx = 0.
$$

En outre, l'inégalité de Hölder nous donne pour tout $p \ge 2$

$$
\left| \int_{\mathbb{R}^2} (\tilde{v} \cdot \nabla v_1) \cdot \tilde{v}\, dx \right| \le \|\tilde{v}\|_{L^2} \|\tilde{v}\|_{L^q} \|\nabla v_1\|_{L^p},
$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$. D'une part, on a d'après la Proposition 1.1 $\|\nabla v_1\|_{L^p} \le Cp \|\omega_1\|_{L^p}$ pour tout $p \ge 2$. D'autre part, on a l'inégalité d'interpolation

$$
\|\tilde{v}\|_{L^q} \le \|\tilde{v}\|_{L^2}^a \|\tilde{v}\|_{L^\infty}^{1-a}, \quad \frac{1}{q} = \frac{a}{2} + \frac{1-a}{\infty}.
$$

Ici, on a $a = 1 - \frac{2}{p}$, d'où l'estimation

$$
|I| \le Cp \int_0^t \|\tilde{v}\|_{L^2}^{2-2/p}\, d\tau.
$$

Estimation de J. On a tout d'abord

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} (\tilde{v} \otimes H^1) : \nabla \tilde{v}\, dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i,j} \tilde{v}_i (H^1)_j \partial_j \tilde{v}_i\, dx = \frac{1}{2} \sum_i \int_{\mathbb{R}^2} \sum_j (H^1)_j \partial_j \tilde{v}_i^2\, dx \\
&= -\frac{1}{2} \sum_i \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{v}_i^2 \mathrm{div}\, H^1\, dx = 0,
\end{aligned}
$$

car H^1 est à divergence nulle. D'autre part, puisque $H^1 = \sum d_i H_i^1$, on a

$$
\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (H^1 \otimes \tilde{v}) : \nabla \tilde{v}\, dx\, d\tau \right| \le C \sum_{i=1}^{l} |d_i| \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (H_i^1 \otimes \tilde{v}) : \nabla \tilde{v}\, dx\, d\tau \right|.
$$

Pour chaque i, on a

$$
\begin{aligned}
\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (H_i^1 \otimes \tilde{v}) : \nabla \tilde{v}\, dx\, d\tau \right| \ &\le \ \left| \int_0^t \int_{B_i} (H_i^1 \otimes \tilde{v}) : \nabla \tilde{v}\, dx\, d\tau \right| \\
&\quad + \left| \int_0^t \int_{B_i^c} (H_i^1 \otimes \tilde{v}) : \nabla \tilde{v}\, dx\, d\tau \right|.
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

Une intégration par parties dans le second membre de cette inégalité combinée avec le fait que $\operatorname{div}\tilde{v} = 0$ nous mène à

$$\Big|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (H_i^1 \otimes \tilde{v}) : \nabla\tilde{v}\, dx\, d\tau\Big| \;\le\; \Big|\int_0^t \int_{B_i} (H_i^1 \otimes \tilde{v}) : \nabla\tilde{v}\, dx\, d\tau\Big|$$
$$+\Big| -\int_0^t \Big(\int_{B_i^c} (\tilde{v}\cdot\nabla H_i^1)\cdot\tilde{v}\, dx + \int_{\partial B_i} (H_i^1\cdot\tilde{v})(\tilde{v}\cdot\nu) ds\Big) d\tau\Big|,$$

d'où

$$\Big|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (H_i^1 \otimes \tilde{v}) : \nabla\tilde{v}\, dx\, d\tau\Big| \le \int_0^t \|H_i^1\|_{L^1(B_i)}\|\tilde{v}\|_{L^\infty(B_i)}\|\nabla\tilde{v}\|_{L^\infty(B_i)}\, d\tau$$
$$+\int_0^t \|\nabla H_i^1\|_{L^\infty(B_i^c)}\|\tilde{v}\|_{L^2}^2\, d\tau + \int_0^t \|H_i^1\|_{L^\infty(\partial B_i)}\|\tilde{v}\|_{L^\infty(\partial B_i)}^2 |\partial B_i|\, d\tau.$$

En appliquant la première partie du Lemme 1.1 pour H_i^1 ainsi que le Lemme 2.1 pour $\tilde{v}$, on obtient

$$\Big|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (H^1 \otimes \tilde{v}) : \nabla\tilde{v}\, dx\, d\tau\Big| \;\le\; C\int_0^t \|\tilde{v}\|_{L^2}^2\, d\tau. \tag{2.4}$$

De manière similaire, on a

$$\Big|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (v_2 \otimes \tilde{H}) : \nabla\tilde{v}\, dx\, d\tau\Big| \le \sum_{i=1}^{l} |d_i| \Big|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (v_2 \otimes \tilde{H}_i) : \nabla\tilde{v}\, dx\, d\tau\Big|.$$

Puis, après intégration par parties,

$$\Big|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (v_2 \otimes \tilde{H}_i) : \nabla\tilde{v}\, dx\, d\tau\Big| \le \Big|\int_0^t \int_{B_i} (v_2 \otimes \tilde{H}_i) : \nabla\tilde{v}\, dx\, d\tau\Big|$$
$$+\Big| -\int_0^t \Big(\int_{B_i^c} (\tilde{H}_i\cdot\nabla v_2)\cdot\tilde{v}\, dx + \int_{\partial B_i} (v_2\cdot\tilde{v})(\tilde{H}_i\cdot\nu) ds\Big)\, d\tau\Big|.$$

Par conséquent,

$$\Big|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (v_2 \otimes \tilde{H}) : \nabla\tilde{v}\, dx\, d\tau\Big| \le \sum_{i=1}^{l} |d_i| \int_0^t \|\tilde{H}_i\|_{L^1(B_i)}\|v_2\|_{L^\infty}\|\nabla\tilde{v}\|_{L^\infty(B_i)}\, d\tau$$
$$+\sum_{i=1}^{l} |d_i| \int_0^t \Big(\|\tilde{H}_i\|_{L^\infty(B_i^c)}\|\tilde{v}\|_{L^2}\|\nabla v_2\|_{L^2} + \|\tilde{H}_i\|_{L^\infty(\partial B_i)}\|\tilde{v}\|_{L^\infty(\partial B_i)}\|v_2\|_{L^\infty}|\partial B_i|\Big)\, d\tau.$$

Une nouvelle utilisation de l'inégalité de Calderón-Zygmund pour v_2 et du Lemme 2.1 conduisent à

$$\Big|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (v_2 \otimes \tilde{H}) : \nabla\tilde{v}\, dx\, d\tau\Big| \le C\sum_{i=1}^{l} \int_0^t \Big(\|\tilde{H}_i\|_{L^1(B_i)} + \|\tilde{H}_i\|_{L^\infty(B_i^c)}\Big)\|\tilde{v}\|_{L^2}\, d\tau. \tag{2.5}$$

Par des calculs très semblables, on parvient aussi à

$$\Big|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (\tilde{H} \otimes v_2) : \nabla\tilde{v}\, dx\, d\tau\Big|$$
$$\le C\sum_{i=1}^{l} \int_0^t \Big(\|\tilde{H}_i\|_{L^1(B_i)} + \|\nabla\tilde{H}_i\|_{L^2(B_i^c)} + \|\tilde{H}_i\|_{L^\infty(\partial B_i)}\Big)\|\tilde{v}\|_{L^2}\, d\tau. \tag{2.6}$$

On cherche ensuite des estimations pour $\tilde{H}$. Puisque $\tilde{H}_i = H_i^1 - H_i^2$, les estimations de potentiel fournies par la Proposition 1.1 impliquent que

$$\|\tilde{H}_i\|_{L^\infty(B_i^c)} = \sup_{z \in B_i^c} \frac{|z_i - \zeta_i|}{2\pi |z - z_i||z - \zeta_i|} \leq C|z_i - \zeta_i|.$$

Par ailleurs, d'après la Proposition 1.2, on a

$$\int_{B_i} |\tilde{H}_i(x)|\, dx = C \int_{B_i} |K(x - z_i) - K(x - \zeta_i)|\, dx \leq C\varphi(|z_i - \zeta_i|).$$

Enfin, observons que pour $x \in B_i^c$, on a

$$|\nabla \tilde{H}_i(x)| \leq |z_i - \zeta_i| \sup_{[x - z_i, x - \zeta_i]} |D^2 K| \leq \frac{C}{|x - y_i|^3} |z_i - \zeta_i|,$$

ce qui implique que $\|\nabla \tilde{H}_i\|_{L^2(B_i^c)} \leq C|z_i - \zeta_i|$. Finalement, les estimations (2.4), (2.5) et (2.6) entraînent

$$|J| \leq 2C \int_0^t \Big(\|\tilde{v}\|_{L^2} + \sum_{i=1}^{l} \big[|z_i - \zeta_i| + \varphi(|z_i - \zeta_i|) \big] \Big) \|\tilde{v}\|_{L^2}\, d\tau.$$

Par croissance de φ, on en déduit que

$$|J| \leq C \int_0^t \Big[r(\tau) + \sqrt{r(\tau)}\varphi(\sqrt{r(\tau)}) \Big]\, d\tau.$$

Estimation pour K. Pour chaque i, on décompose l'intégrant de K_i comme

$$\begin{aligned} v_1(z_i)^\perp \cdot \tilde{v}(z_i) - v_2(\zeta_i)^\perp \cdot \tilde{v}(\zeta_i) &= \big(v_1(z_i)^\perp - v_1(\zeta_i)^\perp\big) \cdot \tilde{v}(z_i) \\ &+ \big(v_1(\zeta_i)^\perp - v_2(\zeta_i)^\perp\big) \cdot \tilde{v}(z_i) + v_2(\zeta_i)^\perp \cdot \big(\tilde{v}(z_i) - \tilde{v}(\zeta_i)\big). \end{aligned}$$

En appliquant la Proposition 1.2 à v_1, on obtient

$$\begin{aligned} &|v_1(z_i)^\perp \cdot \tilde{v}(z_i) - v_2(\zeta_i)^\perp \cdot \tilde{v}(\zeta_i)| \\ &\quad \leq C|\tilde{v}(z_i)|\varphi(|z_i - \zeta_i|) + |\tilde{v}(\zeta_i)||\tilde{v}(z_i)| + \|v_2\|_{L^\infty} \|\nabla \tilde{v}\|_{L^\infty([z_i, \zeta_i])} |z_i - \zeta_i|, \end{aligned}$$

de sorte que le Lemme 2.1 donne finalement

$$|K| \leq C \int_0^t \big[r(\tau) + \sqrt{r(\tau)}\varphi(\sqrt{r(\tau)}) \big]\, d\tau.$$

L'inégalité pour la vitesse découle alors immédiatement des estimations précédentes pour I, J et K.

Seconde étape. On a pour les points vortex

$$|z_i(t) - \zeta_i(t)|^2 \leq C \int_0^t \big[r(\tau) + \sqrt{r(\tau)}\varphi(\sqrt{r(\tau)}) \big]\, d\tau, \qquad \forall 0 \leq t \leq T_C.$$

En effet, comme z_i et ζ_i sont lipschitziennes, leurs dérivées existent en presque tout temps $0 \leq t \leq T_C$. Pour ces temps-là on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|z_i-\zeta_i|^2 &= 2\langle z_i-\zeta_i, v_1(z_i)-v_2(\zeta_i)\rangle + 2\sum_{j\neq i} d_j\langle H_j^1(z_i)-H_j^2(\zeta_i), z_i-\zeta_i\rangle \\ &= 2\langle z_i-\zeta_i, v_1(z_i)-v_1(\zeta_i)\rangle + 2\langle z_i-\zeta_i, \tilde{v}(\zeta_i)\rangle \\ &\quad + 2\sum_{j\neq i} d_j\langle H_j^1(z_i)-H_j^2(\zeta_i), z_i-\zeta_i\rangle.\end{aligned}$$

D'une part, puisque les vortex restent séparés sur $[0,T]$, on a d'après la Proposition 1.1

$$|H_j^1(z_i)-H_j^2(\zeta_i)| = |K(z_i-z_j)-K(\zeta_i-\zeta_j)| \leq C\delta^{-2}\left(|z_i-\zeta_i|+|z_j-\zeta_j|\right),$$

où δ est introduit au Corollaire 2.1. Ainsi, en utilisant par ailleurs le Lemme 2.1 et la Proposition 1.2 pour v_1, on voit que

$$\frac{d}{dt}|z_i-\zeta_i|^2 \leq C\big(|z_i-\zeta_i|\varphi(|z_i-\zeta_i|) + |z_i-\zeta_i|\|\tilde{v}\|_{L^2} + |z_i-\zeta_i|\sqrt{r}(t)\big),$$

et l'on conclut par sommation pour i parcourant 1 à l, puis par intégration sur $[0,t]$.

Finalement, observons que pour $z \leq 1$ on a $z\varphi(z) \leq \varphi(z^2)$ et $z \leq \varphi(z)$. La conclusion de la Proposition 2.5 se déduit alors directement des deux étapes, ainsi que de la définition de T_0. □

Le Théorème 2.1 est alors une conséquence immédiate du

Lemme 2.2. *Pour tout $p \geq 1$, on a*

$$\varphi(z) \leq p\, z^{1-\frac{1}{p}}, \qquad \forall z \geq 0,$$

où φ est la fonction définie à la Proposition 1.2.

Supposons ce résultat vrai pour le moment et terminons la preuve du Théorème 2.1. En invoquant la Proposition 2.5, on trouve l'inégalité

$$r(t) \leq C\int_0^t p\, r(\tau)^{1-\frac{1}{p}}\, d\tau, \quad t \leq T_0,$$

qui après intégration nous conduit à

$$r(t) \leq (Ct)^p, \qquad \forall p \geq 2, \quad \forall t \leq T_0.$$

En faisant tendre p vers l'infini, on obtient dans un premier temps que $r(t) \equiv 0$ pour tout $t < \min(T_0, 1/C)$. Par définition de T_0, on obtient donc $r(t) \equiv 0$ sur $[0, T^*]$, où $T^* = \min(T_C, 1/C)$. Puisque T^* est un nombre fixe, déterminé a priori, il ne reste plus qu'à réitérer le raisonnement précédent sur les intervalles $[kT^*, (k+1)T^*]$, $k = 1, \ldots, [T/T^*]$, pour conclure que $r(t) \equiv 0$ sur $[0,T]$, comme nous le désirions. □

Démonstration du Lemme 2.2. Le résultat est immédiat lorsque $z \geq 1$. Soit $f_p(z) = z^{\frac{1}{p}}(1-\ln z)$. Il nous suffit de montrer que $f_p(z) \leq p$.

En calculant $f_p'(z) = z^{\frac{1}{p}-1}\big(\frac{1}{p}(1-\ln z)-1\big)$, on voit que $f_p'(z) \geq 0$ si et seulement si $z \leq e^{1-p}$. Ainsi, f_p atteint son maximum en la valeur $z = e^{1-p}$, d'où

$$f_p(z) \leq f_p(e^{1-p}) = pe^{\frac{1}{p}-1} \leq p$$

pour $p \geq 1$. Le résultat est démontré. □

2.4 Une approche lagrangienne.

Dans cette partie, nous présentons une méthode alternative pour démontrer le Théorème 2.1. Contrairement à la précédente, cette méthode fait appel à la notion de trajectoire.

Soient $T > 0$ et $(\omega, z_1, \ldots, z_l)$ une solution de (E) sur $[0,T]$ dont la donnée initiale $(\omega_0, z_{i,0})$ vérifie les hypothèses du Théorème 2.1.

Soit $\varepsilon > 0$ un petit paramètre tel que $\varepsilon < R(T) = \min_{[0,T]} R(t)$, où $t \mapsto R(t)$ est le rayon déterminé à la Proposition 2.1. Soit $K_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction lipschitzienne, bornée, à divergence nulle, qui coïncide avec K en dehors de la boule $B(0,\varepsilon)$ et qui vérifie $\int_{B(0,\varepsilon)} K_\varepsilon = 0$.

On prétend que ω est solution faible de l'équation régularisée

$$\partial_t \omega + \operatorname{div}\Big((v + \sum_{i=1}^{l} d_i K_\varepsilon(x - z_i(t))\omega\Big) = 0.$$

En effet, soit φ une fonction test, alors on a pour chaque i

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \omega K\left(x - z_i(t)\right) \cdot \nabla\varphi \, dx \\
&= \int_{B(z_i(t),\varepsilon)} \omega K\left(x - z_i(t)\right) \cdot \nabla\varphi \, dx + \int_{B(z_i(t),\varepsilon)^c} \omega K_\varepsilon\left(x - z_i(t)\right) \cdot \nabla\varphi \, dx \\
&= \int_{B(z_i(t),\varepsilon)} \omega\big[K\left(x - z_i(t)\right) - K_\varepsilon\left(x - z_i(t)\right)\big] \cdot \nabla\varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^2} \omega K_\varepsilon\left(x - z_i(t)\right) \cdot \nabla\varphi \, dx.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\omega(t) \equiv \alpha_i$ dans la boule $B(z_i(t),\varepsilon)$ d'après la Proposition 2.1, on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_{B(z_i(t),\varepsilon)} \omega\big[K\left(x - z_i(t)\right) - K_\varepsilon\left(x - z_i(t)\right)\big] \cdot \nabla\varphi \, dx \\
&\qquad = \alpha_i \int_{B(z_i(t),\varepsilon)} \big[K\left(x - z_i(t)\right) - K_\varepsilon\left(x - z_i(t)\right)\big] \cdot \nabla\varphi \, dx = 0,
\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte d'une intégration par parties et du fait que K et K_ε sont à divergence nulle.

Clairement, le champ $v + \sum d_i K_\varepsilon\left(\cdot - z_i\right)$ appartient à $L^\infty\big([0,T], \mathrm{QL}(\mathbb{R}^2)\big)$. Le deuxième point du Théorème 1.2 assure en outre qu'il est continu en temps. Il en résulte l'existence de trajectoires $t \mapsto X_\varepsilon(x,t)$, de classe C^1 sur $[0,T]$, vérifiant

$$\frac{d}{dt} X_\varepsilon(t,x) = v(t, X_\varepsilon(t,x)) + \sum_{i=1}^{l} d_i K_\varepsilon\big(X_\varepsilon(t,x) - z_i(t)\big), \quad X_\varepsilon(0,x) = x \neq z_{0,i}.$$

De plus, une transcription rapide de la preuve du dernier point du Théorème 1.2 implique que ω est constant le long de ces trajectoires. Il suffit ainsi d'établir l'unicité pour cette formulation lagrangienne, où la partie singulière du champ de vitesse a été remplacée par un champ borné et lipschitzien.

Pour deux solutions (ω_1, z) et (ω_2, ζ) du système mixte Euler-points vortex sur $[0,T]$ dont la donnée initiale $(\omega_0, z_{i,0})$ vérifie les hypothèses du Théorème 2.1, choisissons $\varepsilon < \rho_m$, où $\rho(t)$ est défini par le Corollaire 2.1 et $\rho_m = \min_{t\in[0,T]} \rho(t)$. Notons X^1_ε et X^2_ε les flots transportant ω_1 et ω_2 respectivement. On introduit la quantité

$$h(t) = \frac{1}{\|\omega_0\|_{L^1}} \int_{\mathbb{R}^2} |X^1_\varepsilon(t,x) - X^2_\varepsilon(t,x)||\omega_0(x)|\, dx + \sum_{i=1}^{l} |z_i(t) - \zeta_i(t)|, \quad h(0) = 0,$$

alors h est lipschitzienne sur $[0,T]$. Nous allons établir pour h une inégalité de type Gronwall.

Première étape : estimation pour la partie régulière. On commence par la partie intégrale de $h(t)$. On a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} |X^1_\varepsilon(t,x) - X^2_\varepsilon(t,x)||\omega_0(x)|\, dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{X^1_\varepsilon - X^2_\varepsilon}{|X^1_\varepsilon - X^2_\varepsilon|} \cdot \big(\dot{X}^1_\varepsilon - \dot{X}^2_\varepsilon\big)|\omega_0(x)|\, dx \\ &= I + \sum_{i=1}^{l} d_i J_i,\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{X^1_\varepsilon - X^2_\varepsilon}{|X^1_\varepsilon - X^2_\varepsilon|} \cdot \big[v_1(X^1_\varepsilon) - v_2(X^2_\varepsilon)\big]|\omega_0(x)|\, dx$$

et

$$J_i = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{X^1_\varepsilon - X^2_\varepsilon}{|X^1_\varepsilon - X^2_\varepsilon|} \cdot \big[K_\varepsilon(X^1_\varepsilon - z_i) - K_\varepsilon(X^2_\varepsilon - \zeta_i)\big]|\omega_0(x)|\, dx.$$

Estimation pour I. Écrivons $I = I_1 + I_2$, avec

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{X^1_\varepsilon - X^2_\varepsilon}{|X^1_\varepsilon - X^2_\varepsilon|} \cdot \big[v_1(X^1_\varepsilon) - v_1(X^2_\varepsilon)\big]|\omega_0(x)|\, dx$$

et

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{X^1_\varepsilon - X^2_\varepsilon}{|X^1_\varepsilon - X^2_\varepsilon|} \cdot \big[v_1(X^2_\varepsilon) - v_2(X^2_\varepsilon)\big]|\omega_0(x)|\, dx.$$

D'une part, la Proposition 1.2 appliquée à v_1 implique l'estimation

$$|I_1| \le C \int_{\mathbb{R}^2} \varphi\left(|X^1_\varepsilon(t,x) - X^2_\varepsilon(t,x)|\right) |\omega_0(x)|\, dx.$$

D'autre part, puisque K_ε est à divergence nulle, les flots X^i_ε préservent la mesure de Lebesgue, d'où

$$v_i(X^2_\varepsilon(x)) = \int_{\mathbb{R}^2} K\big(X^2_\varepsilon(x) - y\big)\omega_i(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^2} K\big(X^2_\varepsilon(x) - X^i_\varepsilon(y)\big)\omega_0(y)\, dy.$$

Par conséquent, on a

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\omega_0(x)|\, dx \frac{X_\varepsilon^1 - X_\varepsilon^2}{|X_\varepsilon^1 - X_\varepsilon^2|} \cdot \int_{\mathbb{R}^2} \Big[K\big(X_\varepsilon^2(x) - X_\varepsilon^1(y)\big) - K\big(X_\varepsilon^2(x) - X_\varepsilon^2(y)\big)\Big]\omega_0(y)\, dy,$$

et d'après le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}
|I_2| &\le \iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \big|K\big(X_\varepsilon^2(x) - X_\varepsilon^1(y)\big) - K\big(X_\varepsilon^2(x) - X_\varepsilon^2(y)\big)\big||\omega_0(y)||\omega_0(x)|\, dx\, dy \\
&\le \int_{\mathbb{R}^2} |\omega_0(y)|\, dy \int_{\mathbb{R}^2} \big|K\big(X_\varepsilon^2(x) - X_\varepsilon^1(y)\big) - K\big(X_\varepsilon^2(x) - X_\varepsilon^2(y)\big)\big||\omega_0(x)|\, dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^2} |\omega_0(y)|\, dy \int_{\mathbb{R}^2} \big|K\big(z - X_\varepsilon^1(y)\big) - K\big(z - X_\varepsilon^2(y)\big)\big||\omega_2(z)|\, dz,
\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte du changement de variable $z = X_\varepsilon^2(t,x)$. Ensuite, on a d'après la Proposition 1.2

$$\int_{\mathbb{R}^2} \big|K\big(z - X_\varepsilon^1(y)\big) - K\big(z - X_\varepsilon^2(y)\big)\big||\omega_2(z)|\, dz \le C\varphi\left(|X_\varepsilon^1(y) - X_\varepsilon^2(y)|\right),$$

ce qui nous conduit à l'estimation

$$|I_2| \le C \int_{\mathbb{R}^2} \varphi\left(|X_\varepsilon^1(t,y) - X_\varepsilon^2(t,y)|\right) |\omega_0(y)|\, dy.$$

Enfin, puisque φ est concave, on obtient en appliquant l'inégalité de Jensen aux inégalités précédentes pour I_1 et I_2

$$|I| \le 2C\|\omega_0\|_{L^1}\varphi\Big(\int_{\mathbb{R}^2} |X_\varepsilon^1(t,x) - X_\varepsilon^2(t,x)|\|\omega_0\|_{L^1}^{-1}|\omega_0(x)|\, dx\Big) \le C\varphi\big(h(t)\big).$$

Estimation pour J_i. Il suffit d'utiliser le fait que K_ε est globalement lipschitzienne (de constante de Lipschitz dépendant bien sûr de ε) pour obtenir

$$|J_i| \le C(\varepsilon)\Big(\int_{\mathbb{R}^2} |X_\varepsilon^1(t,x) - X_\varepsilon^2(t,x)||\omega_0(x)|\, dx + |z_i(t) - \zeta_i(t)|\Big) \le C(\varepsilon)h(t).$$

Seconde étape : estimation pour les points vortex. Dans un second temps, on évalue la partie « ponctuelle » de $h(t)$. Soit $t \in [0,T]$ en lequel toutes les trajectoires sont dérivables. La Proposition 1.1 pour K et la Proposition 1.2 pour v_1 nous donnent

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|z_i(t) - \zeta_i(t)| &\le |v_1(z_i) - v_2(\zeta_i)| + \sum_{j\neq i} |d_j|\big|K(z_i - z_j) - K(\zeta_i - \zeta_j)\big| \\
&\le C\varphi\left(|z_i - \zeta_i|\right) + |(v_1 - v_2)(\zeta_i)| + C\delta^{-2}\sum_{j\neq i}\left(|z_i - \zeta_i| + |z_j - \zeta_j|\right),
\end{aligned}$$

où δ est fournie par le Corollaire 2.1.

Dans le but d'estimer le deuxième terme du membre de droite, on utilise la Proposition 2.1 : puisque $\omega_j(t) \equiv \alpha_i$ dans $B_i = B(\zeta_i(t),\varepsilon)$ pour $j = 1$ ou $j = 2$, on a

$$\begin{aligned}
v_j(\zeta_i) &= \int_{\mathbb{R}^2} K(\zeta_i - y)\omega_j(y)\, dy \\
&= \alpha_i \int_{B_i} K(\zeta_i - y)\, dy + \int_{B_i^c} K(\zeta_i - y)\omega_j(y)\, dy \\
&= \int_{B_i^c} K(\zeta_i - y)\omega_j(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^2} K_\varepsilon(\zeta_i - y)\omega_j(y)\, dy,
\end{aligned}$$

car $\int_{B(0,\varepsilon)} K(z)\,dz = \int_{B(0,\varepsilon)} K_\varepsilon(z)\,dz = 0$. Ensuite, on obtient à l'aide des changements de variable $y = X^1_\varepsilon(x)$ et $y = X^2_\varepsilon(x)$

$$\begin{aligned} v_1(\zeta_i) - v_2(\zeta_i) &= \int_{\mathbb{R}^2} K_\varepsilon\left(\zeta_i - y\right)\omega_1(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^2} K_\varepsilon\left(\zeta_i - y\right)\omega_2(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \Big[K_\varepsilon\left(\zeta_i - X^1_\varepsilon(x)\right) - K_\varepsilon\left(\zeta_i - X^2_\varepsilon(x)\right)\Big]\omega_0(x)\,dx, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$|(v_1 - v_2)(\zeta_i)| \leq C(\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^2} |X^1_\varepsilon(x) - X^2_\varepsilon(x)||\omega_0(x)|\,dx.$$

En rassemblant les estimations précédentes pour i variant de 1 à l, on trouve enfin

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{l} |z_i(t) - \zeta_i(t)| \leq C[h(t) + \varphi(h(t))].$$

Fin de la démonstration. Les calculs précédents établissent que pour presque tout $t \in [0,T]$,

$$h'(t) \leq C[h(t) + \varphi(h(t))], \quad h(0) = 0.$$

Finalement, tant que $h \leq 1$, on a $h'(t) \leq C\varphi(h(t))$ pour une constante C et le Lemme 2.2 entraîne que $h'(t) \leq Cph(t)^{1-\frac{1}{p}}$ pour tout $p \geq 2$. Par le même argument que celui de la fin du Paragraphe 2.3.2, on conclut que h est identiquement nulle sur $[0,T]$. $\square$

Chapitre 3

Évolution en temps grand du support du tourbillon dans le système mixte Euler-points vortex

3.1 Introduction.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'évolution en temps grand du support de la partie régulière du tourbillon ω dans le système mixte Euler-points vortex. Afin d'assurer l'existence d'une solution *globale*, nous nous restreindrons dans un premier temps au cas d'un seul point vortex d'intensité $\gamma \in \mathbb{R}^*$ et nous présenterons l'adaptation au cas de plusieurs points vortex à la fin de ce chapitre. Nous utiliserons ici principalement la formulation *lagrangienne*

$$\begin{cases} v = K * \omega, \\ \dot{z}(t) = v(t, z(t)), \\ z(0) = z_0, \\ \dot{\phi}_t(x) = v(t, \phi_t(x)) + \gamma K\big(\phi_t(x) - z(t)\big), \\ \phi_0(x) = x, \ x \neq z_0, \\ \omega(t, \phi_t(x)) = \omega_0(x). \end{cases} \tag{M}$$

Dans toute la suite, on notera $\omega_t = \omega(t, \cdot)$. Nous verrons que les résultats connus à propos des équations d'Euler classiques peuvent être pour la plupart généralisés au problème mixte (M).

Le fait que v soit uniformément bornée et vérifie $\|v\|_\infty \leq C\|\omega_0\|_{L^1}^{1/2}\|\omega_0\|_{L^\infty}^{1/2}$ implique que $|z(t)|$ croît au plus linéairement en temps. Par ailleurs, des calculs immédiats utilisant la forme explicite de K conduisent à la même estimation pour la distance $|\phi_t(x) - z(t)|$. Dans le cas le plus général, c'est-à-dire sans aucune hypothèse de signe pour ω_0, nous disposons donc de la première généralisation suivante.

Théorème 3.1. *Soit $\omega_0 \in L_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ dont le support Λ_0 est inclus dans $B(0, R_0)$ et soit $z_0 \in \mathbb{R}^2$. Soit (ω, z) une*[26] *solution du sytème couplé Euler-point vortex* (M). *Alors pour tout $t \geq 0$, le support Λ_t de ω_t vérifie*

$$\Lambda_t \subset B(0, R(t)),$$

où

$$R(t) = |z_0| + R_0 + c\|\omega_0\|_{L^1}^{1/2}\|\omega_0\|_{L^\infty}^{1/2} t$$

et c est une constante universelle.

Désormais, nous considérons le cas où ω_0 est de *signe constant*, par exemple *positif*. Puisque ω est transporté par des trajectoires, il est clair que ω reste de signe constant, positif, à temps positif. À l'instar du cas classique ($\gamma = 0$), on définit la masse

$$m_0 + \gamma = \int_{\mathbb{R}^2} \omega_t(x)\, dx + \gamma \equiv \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x)\, dx + \gamma$$

d'une part, le centre d'inertie

$$c_0 = \int_{\mathbb{R}^2} x\omega_t(x)\, dx + \gamma z(t) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} x\omega_0(x)\, dx + \gamma z_0$$

[26] *La* solution si ω est initialement constant au voisinage de z_0, en vertu du Chapitre 2.

d'autre part, et finalement le moment angulaire

$$i_0 = \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \omega_t(x)\, dx + \gamma |z(t)|^2 \equiv \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \omega_0(x)\, dx + \gamma |z_0|^2.$$

Nous montrerons que ces quantités sont conservées à la Section 3.2.

Le principal résultat de ce chapitre est le

Théorème 3.2. *Soit $\omega_0 \in L_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ à support compact $\Lambda_0 \subset B(0, R_0)$ et tel que ω_0 est de signe constant positif. Soit $z_0 \in \mathbb{R}^2$. On note*

$$m_0 = \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x)\, dx > 0.$$

Soit γ un réel tel que l'une des conditions suivantes soit réalisée :

(i) $\gamma < 0$ et $|\gamma| > m_0$, ou bien

(ii) $\gamma \geq 0$.

Soit (ω, z) une solution globale au système mixte Euler-point vortex (M). *Il existe une constante $C_0 = C(m_0, i_0, c_0, \|\omega_0\|_{L^\infty}, R_0, |z_0|)$ telle que pour tout temps positif t, on a*

$$\Lambda_t \subset B(0, R(t)),$$

où $t \mapsto R(t)$ est une fonction croissante telle que

$$R(t) \leq C_0 (t^{\frac{1}{4}} \ln \ln(t+2) + 1).$$

Stratégie de démonstration. Pour établir ce résultat, nous adopterons la méthode d'Iftimie, Gamblin et Sideris [20]. Pour une constante C_0 ne dépendant que de $m_0, i_0, c_0, \|\omega_0\|_{L^\infty}, R_0$ et $|z_0|$ à choisir ultérieurement, on introduit

$$r(t) = C_0 (t^{\frac{1}{4}} \ln \ln(t+2) + 1).$$

Pour $x_0 \in \Lambda_0$, soit $x(t, x_0) \equiv x(t)$ la trajectoire issue de x_0. Nous démontrerons que

$$\frac{d}{dt}|x(t)| \leq \frac{C_0}{|x(t)|^3} \quad \text{si} \quad |x(t)| \geq r(t), \tag{$\mathcal{P}$}$$

propriété qui implique la conclusion du Théorème 3.2. En effet, on peut supposer, quitte à accroître C_0, que tout $x_0 \in \Lambda_0$ vérifie $|x_0| < r(0)$. Puisque $r(t)$ croît plus vite que $t^{1/4}$, on vérifie que, quitte à augmenter C_0 à nouveau, $(\mathcal{P})$ entraîne que $|x(t)| \leq r(t)$ pour tout $t \geq 0$. La conclusion s'ensuit, puisque ω est constant le long des trajectoires.

La propriété $(\mathcal{P})$ est elle-même une conséquence des deux propositions suivantes, qui seront établies à la Section 3.3.

Proposition 3.1. *Il existe une constante K_1, ne dépendant que de $m_0, i_0, c_0, \|\omega_0\|_{L^\infty}, R_0$ et $|z_0|$, telle que pour tout $x_0 \in \Lambda_0$, on a*

$$\frac{d|x(t)|}{dt} \leq \frac{K_1}{|x(t)|^3} + K_1 \Big(\int_{|y| \geq \frac{|x(t)|}{2}} \omega_t(y)\, dy \Big)^{\frac{1}{2}} \quad si \quad |x(t)| \geq K_1.$$

Lorsque $|x|$ est suffisamment grand, la proposition suivante fournit une estimation de la masse de tourbillon présente en dehors de la boule $B(0,|x|)$.

Proposition 3.2. *Il existe une constante C_0, dépendant uniquement de $m_0, i_0, c_0, \|\omega_0\|_{L^\infty}, R_0$ et $|z_0|$, telle que si*

$$r(t) \leq r \leq |z_0| + R_0 + c\|\omega_0\|_{L^1}^{1/2}\|\omega_0\|_{L^\infty}^{1/2} t,$$

où c est une constante universelle et $r(t)$ est défini par

$$r(t) = C_0(t^{\frac{1}{4}} \ln\ln(t+2) + 1),$$

alors

$$\Big(\int_{|y|\geq \frac{r}{2}} \omega_t(y)\, dy\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{r^3}.$$

Remarque 3.1. *Il est possible de remplacer la borne r^{-3} par $C(k)r^{-k}$ pour tout $k>0$, la borne r^{-3} est néanmoins suffisante pour démontrer le Théorème 3.2.*

3.2 Quelques résultats préliminaires.

3.2.1 Conservation.

Commençons par établir les propriétés de conservation mentionnées dans l'introduction.

Proposition 3.3. *Soient $\omega_0 \in L^\infty_c$ et $z_0 \in \mathbb{R}^2$. Pour toute solution (ω, z) de* (M)*, le centre d'inertie*

$$c = \int_{\mathbb{R}^2} x\omega_t(x)\, dx + \gamma z(t)$$

et le moment angulaire

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2\omega_t(x)\, dx + \gamma|z(t)|^2$$

sont constants.

Démonstration. Soient $t>0$ et soit $R>0$ tel que le support de ω_s soit inclus dans $B(0,R)$ pour $0 \leq s \leq t$. Soit χ une fonction lisse égale à 1 sur $B(0,R)$ et nulle à l'extérieur de $B(0,2R)$. Soient $\Phi(x) = x_k\chi(x)$, $k=1,2$ et $\Phi(x) = |x|^2\chi(x)$ respectivement. On sait que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x)\omega_t(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x)\omega_0(x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \omega_s\big[v(s,x) + \gamma K(x - z(s))\big] \cdot \nabla\Phi\, dx\, ds.$$

En tenant compte du fait que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega_s(x)v(s,x)\, dx = \iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} K(x-y)\omega_s(x)\omega_s(y)\, dx\, dy = 0$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega_s(x)v(s,x)\cdot x = \iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} K(x-y)\cdot x\, \omega_s(x)\omega_s(y)\, dx\, dy = 0$$

par échange de x et y et grâce à l'identité $K(z)\cdot z = 0$, puis en utilisant l'EDO vérifiée par $z(t)$, on aboutit à la conclusion. □

Rappelons pour conclure ce paragraphe le

Lemme 3.1 (Proposition 1.2 ou [20], Lemme 2.1). *Soient $S \subset \mathbb{R}^2$ et $f \in L^1(S) \cap L^\infty(S)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,*

$$\int_S \frac{|f(y)|}{|x-y|}\,dy \leq C\|f\|_{L^1(S)}^{1/2}\|f\|_{L^\infty(S)}^{1/2},$$

pour une constante C.

3.2.2 Bornes sur le moment d'inertie et le point vortex.

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que l'une et l'autre des hypothèses (i) et (ii) du Théorème 3.2 impliquent que le moment d'inertie

$$\tilde{\imath} = \tilde{\imath}(t) = \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \omega_t(x)\,dx$$

correspondant à la partie régulière du tourbillon est borné, ce qui permet de se ramener au cas classique $\gamma = 0$. De par la définition de i_0, $\tilde{\imath}(t)$ est borné si γ est positif. On se restreindra donc dorénavant à l'hypothèse (i) du théorème.

Dans toute la suite, on supposera, quitte à changer de coordonnées, que

$$c_0 = 0.$$

Proposition 3.4. *Il existe une constante $K_2 = K_2(m_0, c_0, i_0)$ telle que*

$$|z(t)| \leq K_2, \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration. Par positivité de ω_t, on a

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^2} |x - z(t)|^2 \omega_t(x)\,dx,$$

d'où

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \omega_t(x)\,dx + \Big(\int_{\mathbb{R}^2} \omega_t(x)\,dx\Big)|z(t)|^2 - 2z(t)\cdot\int_{\mathbb{R}^2} x\omega_t(x)\,dx.$$

En introduisant les quantités $m_0, c_0 = 0$ et i_0, on obtient

$$0 \leq i_0 - \gamma|z(t)|^2 + m_0|z(t)|^2 + 2\gamma|z(t)|^2,$$

d'où le résultat puisque $\gamma + m_0 < 0$. □

En combinant la Proposition 3.4 et le fait que i_0 est constant, on obtient immédiatement le

Corollaire 3.1. *Il existe une constante $K_3 = K_3(m_0, i_0, c_0)$ telle que*

$$\tilde{\imath}(t) = \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \omega_t(x)\,dx \leq K_3, \quad \forall t \geq 0.$$

3.3 Démonstration des Propositions 3.1 et 3.2.

Dans toute cette section, C désignera une constante dépendant uniquement de ω_0 et z_0, plus précisément de $m_0, i_0, c_0, \|\omega_0\|_{L^\infty}, R_0$ et $|z_0|$, pouvant éventuellement changer d'une ligne à l'autre.

3.3.1 Démonstration de la Proposition 3.1.

On souhaite établir une borne pour $d|x(t)|/dt$ lorsque $x(t)$ est proche de $\partial B(0, R(t))$. D'après le système (M), $x(t)$ subit l'influence du champ de vitesse $v = K * \omega$, pour lequel on dispose des estimations de [20], et du champ créé par le point vortex. Quitte à accroître K_1, on peut supposer que $K_1 \geq 2K_2$, où K_2 est la borne introduite à la Proposition 3.4. Ainsi, lorsque $|x(t)| \geq K_1$, le champ $K(x(t) - z(t))$ se comporte presque comme le champ $K(x(t))$, qui n'a pas d'influence sur l'accroissement de $|x(t)|$.

En utilisant le système (M), on calcule

$$\begin{aligned}
\frac{d|x(t)|}{dt} &= \frac{x}{|x|} \cdot \frac{dx}{dt} \\
&= \frac{x}{|x|} \cdot v(t,x) + \gamma \frac{x}{|x|} \cdot K(x - z(t)) \\
&= \frac{x}{2\pi|x|} \cdot \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} \omega_t(y)\, dy + \gamma \frac{x}{2\pi|x|} \cdot \frac{(x-z)^\perp}{|x-z|^2}.
\end{aligned}$$

En introduisant le centre d'inertie dans le membre de droite, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d|x(t)|}{dt} = & \frac{x}{2\pi|x|} \cdot \int_{\mathbb{R}^2} (x-y)^\perp \left(\frac{1}{|x-y|^2} - \frac{1}{|x|^2} \right) \omega_t(y)\, dy \\
& + \gamma \frac{x}{2\pi|x|} \cdot (x-z)^\perp \left(\frac{1}{|x-z|^2} - \frac{1}{|x|^2} \right) \\
& \quad + \frac{1}{|x|^2} \frac{x}{2\pi|x|} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^2} (x-y)^\perp \omega_t(y)\, dy + \gamma (x-z)^\perp \right).
\end{aligned}$$

Comme $c_0 = 0$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2\pi|x|^3} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^2} (x-y)^\perp \omega_t(y)\, dy + \gamma (x-z)^\perp \right) &= -\frac{x}{2\pi|x|^3} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^2} y^\perp \omega_t(y)\, dy + \gamma z^\perp \right) \\
&= -\frac{x}{2\pi|x|^3} \cdot c_0^\perp \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\frac{d|x(t)|}{dt} = \frac{x}{2\pi|x|} \cdot \int_{\mathbb{R}^2} (x-y)^\perp \frac{y \cdot (2x-y)}{|x|^2|x-y|^2} \omega_t(y)\, dy + \gamma \frac{x}{2\pi|x|} \cdot (x-z)^\perp \frac{z \cdot (2x-z)}{|x|^2|x-z|^2}.$$

Commençons par estimer la contribution de la partie régulière du tourbillon. Puisque ω_t est positif, on déduit directement du Corollaire 3.1 et de l'inégalité (5) de [20] l'estimation

$$\left| \frac{x}{2\pi|x|} \cdot \int_{\mathbb{R}^2} (x-y)^\perp \frac{y \cdot (2x-y)}{|x|^2|x-y|^2} \omega_t(y)\, dy \right| \leq \frac{C}{|x|^3} + C \left(\int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} |\omega_t(y)|\, dy \right)^{1/2}.$$

Afin d'estimer la contribution du point vortex, on observe que $x\cdot(x-z)^\perp = -x\cdot z^\perp$, d'où

$$\Big|\frac{x}{|x|}\cdot(x-z)^\perp\frac{z\cdot(2x-z)}{|x|^2|x-z|^2}\Big| \leq \frac{|z|^2|2x-z|}{|x|^2|x-z|^2}.$$

Par ailleurs, le fait que $|x|\geq 2K_2\geq 2|z|$ implique que $|x-z|\geq |x|/2$ et en particulier

$$|2x-z|\leq |x|+|x-z|\leq 3|x-z|.$$

Enfin, en utilisant le fait que $|z(t)|$ est bornée, on obtient

$$\Big|\frac{x}{|x|}\cdot(x-z)^\perp\frac{z\cdot(2x-z)}{|x|^2|x-z|^2}\Big| \leq \frac{C}{|x|^3},$$

et la Proposition 3.1 est démontrée. □

3.3.2 Démonstration de la Proposition 3.2.

La démonstration qui suit est une adaptation au système mixte ($\gamma\neq 0$) de la démonstration de la Proposition 2.1 de [20] ($\gamma=0$).

Considérons les fonctions[27]

$$f: t\mapsto \exp(-e^{-t}) \quad \text{et} \quad \phi_r(x) = f\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right),$$

puis

$$f_r(t) = \int_{\mathbb{R}^2}\phi_r(x)\omega_t(x)\,dx,$$

où $0<\lambda<1$ est un paramètre à déterminer. Comme f est croissante,

$$f_r(t)\geq \int_{|x|\geq r} f\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right)\omega_t(x)\,dx \geq f(0)\int_{|x|\geq r}\omega_t(x)\,dx,$$

et nous voyons qu'il suffit d'obtenir une estimation sur $f_r(t)$.

On se servira par la suite des propriétés suivantes pour f. D'une part,

$$0<f'(y)\leq f(y) \quad \text{et} \quad |f''(y)|\leq Cf(y), \quad \text{pour} \quad y\geq 0, \tag{3.1}$$

et d'autre part, pour $p\geq 1$,

$$0<f'(y)\leq Cp^2f(y)^{1-\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad |f''(y)|\leq Cp^2 f(y)^{1-\frac{1}{p}}, \quad \text{pour} \quad y\leq 0. \tag{3.2}$$

Enfin, pour tout $y_0\in\mathbb{R}$, on a

$$f'(y)\leq C\exp(-\frac{1}{2}e^{-y_0}), \quad \forall y\leq y_0. \tag{3.3}$$

Nous établirons pour commencer quelques lemmes préliminaires.

[27] Dans [20], le choix de $f(t)=\frac{e^t}{1+e^t}$ mène à des estimations légèrement différentes, voir ci-après.

Lemme 3.2. *Il existe une constante* $K_4 = K_4(m_0, i_0, \|\omega_0\|_{L^\infty}, R_0, |z_0|)$ *telle que pour tous* $r \geq K_4$ *et* $p \geq 1$,

$$f_r'(t) \leq K_4 \left(\frac{\exp(-\frac{1}{2}\exp(\frac{3}{4\lambda}))}{\lambda r^2} + \frac{f_r(t)}{\lambda^2 r^4} + \frac{p^2}{\lambda^2 r^{4+\frac{2}{p}}} f_r(t)^{1-\frac{1}{p}} \right).$$

Démonstration. Le système (M) en formulation faible s'écrit

$$\begin{aligned}
f_r'(t) &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla\phi_r(x) \cdot \big[v(x) + \gamma K(x - z(t))\big]\omega_t(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla\phi_r(x) \cdot v(x)\omega_t(x)\,dx + \gamma \int_{\mathbb{R}^2} \nabla\phi_r(x) \cdot K(x - z(t))\omega_t(x)\,dx \\
&= I + J.
\end{aligned}$$

En insérant la formule de Biot-Savart $v = K * \omega$, on exprime les termes I et J sous la forme

$$I = \frac{1}{\pi\lambda r^2} \iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} f'\left(\frac{|x|^2 - r^2}{\lambda r^2}\right) \frac{x \cdot (x-y)^\perp}{|x-y|^2} \omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy$$

et

$$\begin{aligned}
J &= \frac{\gamma}{\pi\lambda r^2} \int_{\mathbb{R}^2} f'\left(\frac{|x|^2 - r^2}{\lambda r^2}\right) \frac{x \cdot (x - z(t))^\perp}{|x - z(t)|^2} \omega_t(x)\,dx \\
&= \frac{\gamma}{\pi\lambda r^2} \int_{\mathbb{R}^2} f'\left(\frac{|x|^2 - r^2}{\lambda r^2}\right) \frac{x^\perp \cdot z(t)}{|x - z(t)|^2} \omega_t(x)\,dx.
\end{aligned}$$

On considère la décomposition $\mathbb{R}^4 = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$, où

$$\begin{cases}
\Omega_1 = \{(x,y);\quad |x| \leq \frac{r}{2}\} \\
\Omega_2 = \{(x,y);\quad |x| \geq \frac{r}{2} \text{ et } |y| \leq \frac{r}{4}\} \\
\Omega_3 = \{(x,y);\quad |x| \geq \frac{r}{2} \text{ et } |y| \geq \frac{r}{4}\}.
\end{cases}$$

On introduit également l'ensemble

$$\Omega_4 = \{(x,y);\quad |x| \geq \frac{r}{4} \text{ et } |y| \geq \frac{r}{4}\} \supset \Omega_3,$$

de sorte que $\Omega_4 \setminus \Omega_3 \subset \Omega_1$. Enfin, on pose

$$\begin{cases}
L(x,y) = \dfrac{1}{\pi\lambda r^2} f'\left(\dfrac{|x|^2 - r^2}{\lambda r^2}\right) \dfrac{x^\perp \cdot y}{|x-y|^2} \omega_t(x)\omega_t(y) \\
M(x,y) = \dfrac{1}{\pi\lambda r^2} f'\left(\dfrac{|x|^2 - r^2}{\lambda r^2}\right) \dfrac{x^\perp \cdot y}{|x|^2} \omega_t(x)\omega_t(y) \\
N(x,y) = \dfrac{1}{\pi\lambda r^2} f'\left(\dfrac{|x|^2 - r^2}{\lambda r^2}\right) x^\perp \cdot y \left(\dfrac{1}{|x-y|^2} - \dfrac{1}{|x|^2}\right) \omega_t(x)\omega_t(y),
\end{cases}$$

alors $L = M + N$ et

$$I = \int_{\mathbb{R}^4} L = \int_{\Omega_1} L + \int_{\Omega_2} L + \int_{\Omega_4} L - \int_{\Omega_4\setminus\Omega_3} L.$$

En incorporant les quantités $M(x,y)$ et $N(x,y)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} L &= \int_{\Omega_2} M + \int_{\Omega_2} N \\
&= \int_{\substack{|x|\geq \frac{r}{2} \\ y\in\mathbb{R}^2}} f'\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right) \frac{x^\perp\cdot y}{|x|^2}\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy - \int_{\Omega_3} M + \int_{\Omega_2} N \\
&= -\gamma \int_{|x|\geq \frac{r}{2}} f'\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right) \frac{x^\perp\cdot z(t)}{|x|^2}\omega_t(x)\,dx - \int_{\Omega_3} M + \int_{\Omega_2} N,
\end{aligned}$$

où on a inséré l'identité $c_0 = 0$ dans la dernière égalité.

Finalement, puisque $f_r'(t) = I + J$, on trouve en rassemblant et regroupant les égalités précédentes

$$f_r'(t) = g_r(t) + h_r(t),$$

où $g_r(t)$ est la contribution de la partie régulière du tourbillon, définie par

$$g_r(t) = \int_{\Omega_1} L + \int_{\Omega_2} N - \int_{\Omega_3} M + \int_{\Omega_4} L - \int_{\Omega_4\setminus\Omega_3} L,$$

et $h_r(t)$ est la contribution du point vortex, définie par

$$\begin{aligned}
h_r(t) = \frac{\gamma}{\pi\lambda r^2}\Big[&\int_{\mathbb{R}^2} f'\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right)\frac{x^\perp\cdot z(t)}{|x-z(t)|^2}\omega_t(x)\,dx \\
&- \int_{|x|\geq\frac{r}{2}} f'\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right)\frac{x^\perp\cdot z(t)}{|x|^2}\omega_t(x)\,dx\Big].
\end{aligned}$$

Dans la suite de la preuve, on évalue chacune des intégrales précédentes séparément.

Première étape : estimation de $\int_{\Omega_1} L$.

Puisque dans Ω_1, on a $\dfrac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2} \leq -\dfrac{3}{4\lambda}$, l'inégalité (3.3) implique que

$$|L(x,y)| \leq C\frac{\exp(-\frac{1}{2}\exp(\frac{3}{4\lambda}))}{\lambda r^2}\frac{|x^\perp\cdot(x-y)|}{|x-y|^2}\omega_t(x)\omega_t(y),$$

d'où

$$\Big|\int_{\Omega_1} L(x,y)\,dx\,dy\Big| \leq \frac{C}{\lambda r^2}\exp\big(-\frac{1}{2}\exp(\frac{3}{4\lambda})\big)\int_{\mathbb{R}^2}|x|\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\omega_t(y)}{|x-y|}\,dy\right)\omega_t(x)\,dx.$$

En utilisant le Lemme 3.1, le Corollaire 3.1 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve donc

$$\Big|\int_{\Omega_1} L(x,y)\,dx\,dy\Big| \leq \frac{C}{\lambda r^2}\exp\big(-\frac{1}{2}\exp(\frac{3}{4\lambda})\big).$$

Deuxième étape : estimation de $\int_{\Omega_4\setminus\Omega_3} L$.

Puisque $\Omega_4\setminus\Omega_3 \subset \Omega_1$, l'étape précédente donne directement

$$\Big|\int_{\Omega_4\setminus\Omega_3} L(x,y)\,dx\,dy\Big| \leq \frac{C}{\lambda r^2}\exp\big(-\frac{1}{2}\exp(\frac{3}{4\lambda})\big).$$

Troisième étape : estimation de $\int_{\Omega_3} M$.
Par une estimation directe, on obtient

$$\Big|\int_{\Omega_3} M(x,y)\,dx\,dy\Big| \le \frac{C}{\lambda r^2}\int_{\Omega_3} f'\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right)\frac{|y|}{|x|}\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy$$
$$\le \frac{C}{\lambda r^3}\left(\int_{|y|\ge \frac{r}{4}} |y|\omega_t(y)\,dy\right)\int_{|x|\ge\frac{r}{2}} f'\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right)\omega_t(x)\,dx.$$

Or, d'après le Corollaire 3.1, on a

$$\int_{|y|\ge\frac{r}{4}} |y|\omega_t(y)\,dy \le \frac{C}{r}\int_{\mathbb{R}^2}|y|^2\omega_t(y)\,dy \le \frac{C}{r},$$

donc

$$\Big|\int_{\Omega_3} M(x,y)\,dx\,dy\Big| \le \frac{C}{\lambda r^4}\int_{|x|\ge\frac{r}{2}} f'\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right)\omega_t(x)\,dx$$
$$\le \frac{C}{\lambda r^4}\int_{|x|\ge\frac{r}{4}} f'\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right)\omega_t(x)\,dx.$$

On évalue à présent l'intégrale

$$j_r(t) = \int_{|x|\ge\frac{r}{4}} f'\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right)\omega_t(x)\,dx$$

en fonction de $f_r(t)$. À cette fin, posons

$$j_r(t) = j_1 + j_2,$$

où

$$j_1 = \int_{|x|\ge r} f'\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right)\omega_t(x)\,dx \quad \text{et} \quad j_2 = \int_{\frac{r}{4}\le|x|\le r} f'\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right)\omega_t(x)\,dx.$$

Lorsque $|x|\ge r$, on a $f'\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right) \le f\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right)$ d'après (3.1), il s'ensuit que

$$j_1 \le f_r(t).$$

Par ailleurs, lorsque $\frac{r}{4}\le|x|\le r$, (3.2) assure que pour tout $p\ge 1$

$$f'\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right) \le Cp^2 f\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right)^{1-\frac{1}{p}},$$

d'où, après utilisation de l'inégalité de Hölder puis du Corollaire 3.1,

$$j_2 \le Cp^2\int_{|x|\ge\frac{r}{4}} \phi_r(x)^{1-\frac{1}{p}}\omega_t(x)\,dx$$
$$\le Cp^2\left(\int_{|x|\ge\frac{r}{4}}\phi_r(x)\omega_t(x)\,dx\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_{|x|\ge\frac{r}{4}}\omega_t(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le \frac{Cp^2}{r^{\frac{2}{p}}} f_r(t)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Les estimations précédentes pour j_1 et j_2 nous mènent finalement à

$$\int_{|x|\geq\frac{r}{4}} f'\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right)\omega_t(x)\,dx \leq Cf_r(t)+\frac{Cp^2}{r^{\frac{2}{p}}}f_r(t)^{1-\frac{1}{p}}, \tag{3.4}$$

dont on déduit que

$$\Big|\int_{\Omega_3} M(x,y)\,dx\,dy\Big| \leq \frac{Cf_r(t)}{\lambda r^4}+\frac{Cp^2}{\lambda r^{4+\frac{2}{p}}}f_r(t)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Quatrième étape : estimation de $\int_{\Omega_2} N$.
Pour $(x,y)\in\Omega_2$, on a $|x-y|\geq|x|/2$ d'où

$$|2x-y|\leq 3|x-y|,$$

donc

$$\frac{|x\cdot(x-y)^{\perp}y\cdot(2x-y)|}{|x-y|^2|x|^2}=\frac{|y\cdot(x-y)^{\perp}y\cdot(2x-y)|}{|x-y|^2|x|^2}\leq C\frac{|x-y|^2|y|^2}{|x-y|^2|x|^2}\leq\frac{C}{r^2}|y|^2.$$

En invoquant le Corollaire 3.1, on obtient par conséquent

$$\Big|\int_{\Omega_2} N(x,y)\,dx\,dy\Big|\leq\frac{C}{\lambda r^4}\int_{|x|\geq\frac{r}{2}} f'\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right)\omega_t(x)\,dx,$$

soit, d'après (3.4),

$$\Big|\int_{\Omega_2} N(x,y)\,dx\,dy\Big| \leq \frac{Cf_r(t)}{\lambda r^4}+\frac{Cp^2}{\lambda r^{4+\frac{2}{p}}}f_r(t)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Cinquième étape : estimation de $\int_{\Omega_4} L$.
On tire parti du fait que Ω_4 est symétrique en écrivant

$$\int_{\Omega_4} L(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_{\Omega_4}\big[L(x,y)+L(y,x)\big]\,dx\,dy.$$

Or $x\cdot(x-y)^{\perp}=y\cdot(x-y)^{\perp}=x^{\perp}\cdot y=-x\cdot y^{\perp}$, d'où

$$\begin{aligned}L(x,y)+L(y,x)&=\frac{1}{\pi\lambda r^2}\Big[f'\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right)-f'\left(\frac{|y|^2-r^2}{\lambda r^2}\right)\Big]\frac{x^{\perp}\cdot y}{|x-y|^2}\omega_t(x)\omega_t(y)\\&=\mathcal{S}(x,y).\end{aligned}$$

De même que pour Ω_2, écrivons $\Omega_4=\Omega_4'\cup\Omega_4''$, où

$$\Omega_4'=\{(x,y)\in\Omega_4;\quad |x-y|\geq\frac{|x|}{2}\}\quad\text{et}\quad\Omega_4''=\{(x,y)\in\Omega_4;\quad |x-y|\leq\frac{|x|}{2}\}.$$

D'une part, on a par croissance de f

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\Omega_4'}\mathcal{S}(x,y)\,dx\,dy\Big|&\leq\frac{C}{\lambda r^2}\int_{\Omega_4'}\Big[f'\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right)+f'\left(\frac{|y|^2-r^2}{\lambda r^2}\right)\Big]\frac{|x|}{|x-y|}\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy\\&\leq\frac{C}{\lambda r^2}\int_{\Omega_4}\Big[f'\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right)+f'\left(\frac{|y|^2-r^2}{\lambda r^2}\right)\Big]\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy\\&\leq\frac{C}{\lambda r^2}\int_{\Omega_4} f'\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right)\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Rappelons qu'en vertu du Corollaire 3.1, on a $\int_{|y|\geq r/4} \omega_t(y)\,dy \leq Cr^{-2}$, et on en déduit que

$$\Big|\int_{\Omega_4'} \mathcal{S}(x,y)\,dx\,dy\Big| \leq \frac{C}{\lambda r^4}\int_{|x|\geq \frac{r}{4}} f'\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right)\omega_t(x)\,dx.$$

L'inégalité (3.4) donne finalement

$$\Big|\int_{\Omega_4'} \mathcal{S}(x,y)\,dx\,dy\Big| \leq \frac{Cf_r(t)}{\lambda r^4} + \frac{Cp^2}{\lambda r^{4+\frac{2}{p}}} f_r(t)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Par ailleurs, pour $(x,y)\in\Omega_4''$, on a $|x|\sim|y|$: en effet, puisque $|x-y|\leq |x|/2$, on a d'une part $|x|\geq |y|-|x-y|\geq |y|-|x|/2$, et d'autre part $|x|\leq |x-y|+|y|\leq |x|/2+|y|$, donc

$$\frac{2|y|}{3}\leq |x|\leq 2|y|.$$

Ensuite, le théorème des accroissements finis assure qu'il existe $\xi\in[\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2},\frac{|y|^2-r^2}{\lambda r^2}]$ tel que

$$f'\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right) - f'\left(\frac{|y|^2-r^2}{\lambda r^2}\right) = f''(\xi)\frac{|x|^2-|y|^2}{\lambda r^2}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\Omega_4''} \mathcal{S}(x,y)\,dx\,dy\Big| &\leq \frac{C}{\lambda^2 r^4}\int_{\Omega_4''} |f''(\xi)|\frac{|x-y||x+y||x|}{|x-y|}\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy\\ &\leq \frac{C}{\lambda^2 r^4}\int_{\Omega_4''} |f''(\xi)||x|^2\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

On remarque que si $\xi<0$, on a $|f''(\xi)|\leq Cp^2 f(\xi)^{1-\frac{1}{p}}$ pour tout $p\geq 1$, alors que si $\xi\geq 0$ on a $|f''(\xi)|\leq Cf(\xi)$. Finalement, on a

$$|f''(\xi)|\leq C\big(p^2 f(\xi)^{1-\frac{1}{p}} + f(\xi)\big),\quad \forall \xi\in\mathbb{R}.$$

Or, par croissance de f, on a

$$f(\xi)\leq f\left(\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}\right) + f\left(\frac{|y|^2-r^2}{\lambda r^2}\right) = \phi_r(x)+\phi_r(y),$$

d'où, d'après l'inégalité de Hölder et le Corollaire 3.1,

$$\begin{aligned}&p^2\int_{\Omega_4''} |f(\xi)|^{1-\frac{1}{p}}|x|^2\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy\\ &\leq p^2\int_{\Omega_4''}\Big(\phi_r(x)+\phi_r(y)\Big)^{1-\frac{1}{p}}|x|^2\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy\\ &\leq Cp^2\left(\int_{\Omega_4''}\Big(\phi_r(x)+\phi_r(y)\Big)|x|^2\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy\right)^{1-\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_{\Omega_4''}|x|^2\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \frac{Cp^2}{r^{\frac{2}{p}}}\left(\int_{\Omega_4''}\Big(\phi_r(x)+\phi_r(y)\Big)|x|^2\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy\right)^{1-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant le fait que $|x| \sim |y|$ dans Ω_4'', on trouve

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_4''} \Big(\phi_r(x) + \phi_r(y)\Big)|x|^2\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy &\leq C \int_{\Omega_4''} \phi_r(x)|x|^2\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \phi_r(x)\omega_t(x) \left(|x|^2 \int_{|y|\geq \frac{|x|}{2}} \omega_t(y)\,dy\right) \\ &\leq C f_r(t),\end{aligned}$$

où la dernière inégalité est une fois de plus une conséquence du Corollaire 3.1. Finalement, on obtient en rassemblant les inégalités précédentes

$$\Big|\int_{\Omega_4''} \mathcal{S}(x,y)\,dx\,dy\Big| \leq \frac{Cf_r(t)}{\lambda^2 r^4} + \frac{Cp^2}{\lambda^2 r^{4+\frac{2}{p}}} f_r(t)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Sixième étape : estimation de $h_r(t)$.
On écrit $h_r(t)$ sous la forme

$$\begin{aligned}h_r(t) &= \frac{C}{\lambda r^2} \int_{|x|\geq \frac{r}{2}} f'\left(\frac{|x|^2 - r^2}{\lambda r^2}\right) x^\perp \cdot z \left(\frac{1}{|x-z|^2} - \frac{1}{|x|^2}\right)\omega_t(x)\,dx \\ &\quad + \frac{C}{\lambda r^2} \int_{|x|\leq \frac{r}{2}} f'\left(\frac{|x|^2 - r^2}{\lambda r^2}\right) \frac{x^\perp \cdot z}{|x-z|^2}\omega_t(x)\,dx \\ &= h_1(t) + h_2(t).\end{aligned}$$

On suppose que $K_4 \geq 4K_2$, où K_2 est définie à la Proposition 3.4. On note que si $r \geq K_4$ et si $|x| \geq r/2$ alors $|x| \geq 2|z|$, donc en particulier $|x - z| \geq |x|/2$. Ainsi, on a pour $|x| \geq r/2$

$$\left|x^\perp \cdot z \left(\frac{1}{|x-z|^2} - \frac{1}{|x|^2}\right)\right| = \frac{|x^\perp \cdot z||z \cdot (2x - z)|}{|x-z|^2|x|^2} \leq \frac{C}{r^2}.$$

On en déduit que

$$h_1(t) \leq \frac{C}{\lambda r^4} \int_{|x|\geq \frac{r}{2}} f'\left(\frac{|x|^2 - r^2}{\lambda r^2}\right)\omega_t(x)\,dx,$$

soit, d'après (3.4),

$$h_1(t) \leq \frac{Cf_r(t)}{\lambda r^4} + \frac{Cp^2}{\lambda r^{4+\frac{2}{p}}} f_r(t)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Par ailleurs, en reprenant les calculs de la première étape, on obtient pour $|x| \leq r/2$

$$f'\left(\frac{|x|^2 - r^2}{\lambda r^2}\right) \frac{|x^\perp \cdot z|}{|x-z|^2} \leq \exp\big(-\frac{1}{2}\exp(\frac{3}{4\lambda})\big)\frac{|z|}{|x-z|},$$

et il s'ensuit que

$$h_2(t) \leq \frac{C\exp\big(-\frac{1}{2}\exp(\frac{3}{4\lambda})\big)}{\lambda r^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|z|}{|x-z|}\omega_t(x)\,dx.$$

En utilisant finalement le Lemme 3.1 ainsi que la Proposition 3.4, on obtient

$$h_2(t) \leq \frac{C\exp(-\frac{1}{2}\exp(\frac{3}{4\lambda}))}{\lambda r^2}.$$

Septième étape : fin de la preuve du Lemme 3.2.
En rassemblant les inégalités établies aux étapes précédentes, on parvient à la conclusion du Lemme 3.2. □

À l'aide du Lemme 3.2, on peut alors établir le résultat suivant.

Lemme 3.3. *Il existe une constante* $K_5 = K_5(m_0, i_0, R_0, \|\omega_0\|_{L^\infty}, |z_0|) \geq K_4$ *telle que pour tout* r *vérifiant*

$$r \geq K_5(t^{\frac{1}{4}} \ln\ln r + 1),$$

on a

$$\int_{|x|\geq r} \omega_t(x)\,dx \leq C f_r(t) \quad \text{et} \quad f_r(t) \leq \frac{1}{r^2 \ln r}.$$

Démonstration. La première inégalité est vraie pour tout $r \geq 0$ et l'on passe directement à la seconde. Choisissons $0 < \lambda < 1$ de sorte que

$$\exp\big(-\frac{1}{2}\exp(\frac{3}{4\lambda})\big) = \frac{1}{r^5},$$

c'est-à-dire

$$\lambda^{-1} = c_0 + c_1 \ln\ln(r),$$

où $c_0, c_1 > 0$. Si $r \geq 2R_0$, où R_0 est défini au Théorème 3.2, on obtient d'après (3.3)

$$f_r(0) = \int_{\mathbb{R}^2} f\left(\frac{|x|^2 - r^2}{\lambda r^2}\right) \omega_0(x)\,dx \leq m_0 \exp\big(-\frac{1}{2}\exp(\frac{3}{4\lambda})\big) < \frac{1}{5r^2 \ln r}$$

dès que $r \geq C$ est suffisamment grand.

Soit ensuite $T(r,p) > 0$ défini par la formule

$$\frac{K_4 p^2 T(r,p)}{\lambda^2 r^6 (\ln r)^{1-\frac{1}{p}}} = \frac{1}{5r^2 \ln r},$$

où K_4 est la constante introduite au Lemme 3.2. Enfin, soit

$$T^* = \sup\{0 \leq t \leq T(r,p) \quad \text{tel que} \quad f_r(t) < \frac{1}{r^2 \ln r}\}.$$

D'après le Lemme 3.2, on a, quitte à augmenter K_4,

$$f_r'(t) \leq K_4 \left(\frac{1}{\lambda r^7} + \frac{1}{\lambda^2 r^6 \ln r} + \frac{p^2}{\lambda^2 r^6 (\ln r)^{1-\frac{1}{p}}}\right) \leq \frac{3K_4 p^2}{\lambda^2 r^6 (\ln r)^{1-\frac{1}{p}}}, \quad \forall t \in [0, T^*],$$

pour tout $r \geq K_4$. On obtient donc

$$f_r(T^*) \leq f_r(0) + \frac{3K_4 p^2 T(r,p)}{\lambda^2 r^6 \ln r^{1-\frac{1}{p}}} \leq \frac{4}{5r^2 \ln r} < \frac{1}{r^2 \ln r},$$

et il s'ensuit que $T^* = T(r,p)$. Choisissons finalement

$$p = \ln\ln r,$$

de sorte que $(\ln r)^{-\frac{1}{p}} = e^{-1}$ et $T(r,p) = T(r) \geq C^{-4} r^4 (\ln\ln r)^{-4}$. Par suite, on a pour $r \geq \max(K_4, C)$:

$$f_r(t) \leq \frac{1}{r^2 \ln r}, \quad \forall t \leq C^{-4} r^4 (\ln\ln r)^{-4}.$$

Finalement, on choisit $K_5 \geq \max(K_4, C)$ et l'on parvient à la conclusion. □

Le Lemme 3.3 permet d'établir une estimation portant cette fois sur la fonction

$$g_r(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi_r(x)\omega_t(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} \eta\left(\frac{|x|^2 - r^2}{\mu r^2}\right)\omega_t(x)\,dx,$$

où $0 < \mu < 1$ est un paramètre à déterminer convenablement et

$$\eta(s) = \frac{e^s}{1+e^s}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Les fonctions η et g_r sont précisément celles qui ont été utilisées dans [20]. Par croissance de η, la masse de tourbillon présente en dehors d'une boule de rayon r est contrôlée par g_r grâce à l'inégalité

$$\int_{|x|\geq r} \omega_t(x)\,dx \leq \eta(0)^{-1} g_r(t).$$

Les estimations de [20], qu'adaptent celles de la Proposition 3.2 ou du Lemme 3.2, s'appuient sur les propriétés de décroissance de η et de ses dérivées :

$$\eta'(s) \leq \min(\eta(s), e^{-|s|}), \quad |\eta''(s)| \leq \eta(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Notre résultat est le suivant

Lemme 3.4. *Il existe une constante $K_6 = K_6(m_0, i_0, R_0, \|\omega_0\|_{L^\infty}, |z_0|) \geq K_5$ telle que si*

$$r \geq K_6(t^{\frac{1}{4}} \ln\ln r + 1),$$

alors

$$g_r'(t) \leq K_6\left(\frac{\exp(-\frac{3}{4\mu})}{\mu r^2} + \frac{g_r(t)}{\mu r^4} + \frac{g_r(t)}{\mu^2 r^4 \ln r}\right).$$

Remarque 3.2. *Dans [20], l'inégalité établie pour g_r est*

$$g_r'(t) \leq C\left(\frac{\exp(-\frac{1}{2\mu})}{\mu r^2} + \frac{g_r(t)}{\mu^2 r^4}\right),$$

l'estimation du Lemme 3.4 en constitue donc une légère amélioration.

Démonstration. Celle-ci consiste à suivre pas à pas la démonstration du Lemme 3.2, en remplaçant f_r par g_r, λ par μ, f par η et ϕ_r par ψ_r. On reprend les notations de la démonstrations du Lemme 3.2, notamment les quantités L, M, N et les espaces $\Omega_i, i = 1, 2, 3, 4$.

Première et deuxième étapes : estimation de $\int_{\Omega_1} L$ et $\int_{\Omega_4\setminus\Omega_3} L$.
Ici, le fait que $\eta'(s) \leq e^{-|s|}$ entraîne que

$$\Big|\int_{\Omega_1} L(x,y)\,dx\,dy\Big| \leq \frac{C}{\mu r^2} \exp\big(-\frac{3}{4\mu}\big).$$

Troisième étape : estimation de $\int_{\Omega_3} M$.
De même qu'à la troisième étape de la démonstration du Lemme 3.2, on a

$$\Big|\int_{\Omega_3} M(x,y)\,dx\,dy\Big| \leq \frac{C}{\mu r^4} \int_{|x|\geq\frac{r}{2}} \eta'\left(\frac{|x|^2 - r^2}{\mu r^2}\right)\omega_t(x)\,dx,$$

et comme $\eta' \leq \eta$ on trouve

$$\Big|\int_{\Omega_3} M(x,y)\,dx\,dy\Big| \leq \frac{Cg_r(t)}{\mu r^4}.$$

Quatrième étape : estimation de $\int_{\Omega_2} N$.
En copiant les calculs de la quatrième étape de la preuve du Lemme 3.2, on obtient à nouveau

$$\Big|\int_{\Omega_2} N(x,y)\,dx\,dy\Big| \leq \frac{C}{\mu r^4}\int_{|x|\geq \frac{r}{2}} \eta'\left(\frac{|x|^2-r^2}{\mu r^2}\right)\omega_t(x)\,dx,$$

soit, puisque $\eta' \leq \eta$,

$$\Big|\int_{\Omega_2} N(x,y)\,dx\,dy\Big| \leq \frac{Cg_r(t)}{\mu r^4}.$$

Cinquième étape : estimation de $\int_{\Omega_4} L$.
Toujours en utilisant le fait que $\eta' \leq \eta$, on obtient directement

$$\Big|\int_{\Omega_4'} \mathcal{S}(x,y)\,dx\,dy\Big| \leq \frac{Cg_r(t)}{\mu r^4}.$$

Par ailleurs,

$$\Big|\int_{\Omega_4''} \mathcal{S}(x,y)\,dx\,dy\Big| \leq \frac{C}{\mu^2 r^4}\int_{\Omega_4''} |\eta''(\xi)||x|^2\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy,$$

où $\xi \in [\frac{|x|^2-r^2}{\lambda r^2}, \frac{|y|^2-r^2}{\lambda r^2}]$. Puisque $|\eta|'' \leq \eta$ et puisque η est croissante, on obtient

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\Omega_4''} \mathcal{S}(x,y)\,dx\,dy\Big| &\leq \frac{C}{\mu^2 r^4}\int_{\Omega_4''} \Big(\psi_r(x)+\psi_r(y)\Big)|x|^2\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy \\ &\leq \frac{C}{\mu^2 r^4}\int_{\Omega_4''} \psi_r(x)|x|^2\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy \\ &\leq \frac{C}{\mu^2 r^4}\int_{|x|\geq \frac{r}{4}} \psi_r(x)\omega_t(x)\left(|x|^2\int_{|y|\geq\frac{|x|}{2}}\omega_t(y)\,dy\right).\end{aligned}$$

Rappelons que K_5 est la constante définie au Lemme 3.3. On peut vérifier que l'on peut choisir $\tilde{C} \geq K_5$ de sorte que si $r \geq \tilde{C}(t^{\frac{1}{4}}\ln\ln r + 1)$ et si x vérifie $|x| \geq r/4$, alors

$$\frac{|x|}{2} \geq K_5\left(t^{\frac{1}{4}}\ln\ln\big(\frac{|x|}{2}\big)+1\right).$$

Ainsi, le Lemme 3.3 garantit que

$$\int_{|y|\geq\frac{|x|}{2}}\omega_t(y)\,dy \leq \frac{C}{\left(\frac{|x|}{2}\right)^2\ln\left(\frac{|x|}{2}\right)} \leq \frac{C}{|x|^2\ln r}.$$

Finalement, dès lors que $r \geq \tilde{C}(t^{\frac{1}{4}}\ln\ln r + 1)$, on a

$$\Big|\int_{\Omega_4''} \mathcal{S}(x,y)\,dx\,dy\Big| \leq \frac{Cg_r(t)}{\mu^2 r^4\ln r}.$$

Sixième étape : estimation de $h_r(t)$.
En copiant la sixième étape de la démonstration du Lemme 3.2, on parvient à

$$h_r(t) \le \frac{C \exp\left(-\frac{3}{4\lambda}\right)}{\mu r^2} + \frac{C g_r(t)}{\mu r^4}.$$

Septième étape : fin de la preuve du Lemme 3.4.
En rassemblant les résultats des étapes précédentes, on trouve

$$g_r'(t) \le C\left(\frac{\exp\left(-\frac{3}{4\mu}\right)}{\mu r^2} + \frac{g_r(t)}{\mu r^4} + \frac{g_r(t)}{\mu^2 r^4 \ln r}\right),$$

pour tout $r \ge \tilde{C}(t^{\frac{1}{4}} \ln\ln r + 1)$. La conclusion du Lemme 3.4 est finalement obtenue en choisissant $K_6 \ge \max(C, \tilde{C})$. □

Grâce aux lemmes précédents, on est à même de compléter la

Démonstration de la Proposition 3.2.
Supposons que $r \ge K_6(t^{\frac{1}{4}} \ln\ln r + 1)$, où K_6 est la constante définie au Lemme 3.4. Dans ce dernier, choisissons μ de sorte que $\exp(-3/(8\mu)) = r^{-8}$, c'est-à-dire $\mu = c(\ln r)^{-1}$ pour $c > 0$. Quitte à augmenter K_6, l'estimation obtenue au Lemme 3.4 pour un tel μ est donc

$$g_r'(t) \le K_6\left(\frac{\exp(-\frac{3}{4\mu})}{\mu r^2} + \frac{g_r(t)}{\mu r^4}\right).$$

Puisque $g_r(0) \le m_0 \exp(-\frac{3}{4\mu})$ pour $r \ge 2R_0$, l'inégalité ci-dessus devient après intégration

$$g_r(t) \le \exp(\frac{K_6 t}{\mu r^4} - \frac{3}{4\mu})(m_0 + r^2).$$

Or, on peut vérifier que, quitte à augmenter K_6, on a

$$\frac{K_6 t}{\mu r^4} - \frac{3}{4\mu} \le -\frac{3}{8\mu} \quad \text{lorsque} \quad t \le K_6^{-4}(\ln\ln r)^{-4} r^4.$$

En supposant que $K_6^2 \ge m_0$ on obtient ainsi

$$g_r(t) \le \frac{m_0}{r^8} + \frac{1}{r^6} \le \frac{2}{r^6}, \quad \text{pour tout} \quad (t,r) \quad \text{tel que} \quad r \ge K_6(t^{\frac{1}{4}} \ln\ln r + 1).$$

Finalement, il est aisé de vérifier que l'on peut choisir $C_0 \ge K_6$ de sorte que si (t,r) satisfait à

$$C_0(1 + t^{\frac{1}{4}} \ln\ln(t+2)) \le r \le |z_0| + R_0 + c\|\omega_0\|_{L^1}^{1/2} \|\omega_0\|_{L^\infty}^{1/2} t,$$

où $c > 0$, alors

$$r \ge K_6(t^{\frac{1}{4}} \ln\ln r + 1).$$

La Proposition 3.2 est donc établie. □

3.4 Commentaires et extensions.

3.4.1 Le cas de plusieurs points vortex.

La généralisation du Théorème 3.2 au cas de plusieurs points vortex nécessite en premier lieu de supposer que toutes les intensités des points sont de même signe, ce qui assure l'existence d'une solution *globale* au système mixte Euler-points vortex. Cette hypothèse de signe sur les intensités permet de plus d'étendre le Théorème 3.1 de la façon suivante.

Théorème 3.3. *Soient $\omega_0 \in L^\infty_c(\mathbb{R}^2)$ à support compact Λ_0 inclus dans $B(0,R_0)$. Soient $z_1,\dots,z_l$ des points deux à deux distincts et $d_1,\dots,d_l$ des réels tous positifs. Soit $(\omega_t, z_1(t),\dots,z_l(t))$ une solution globale au système mixte Euler-points vortex. Il existe une constante C_0, ne dépendant que de $\max|z_i|, R_0$ et $\|\omega_0\|_{L^\infty}$, telle que*

$$\text{supp}\,(\omega_t) \subset B(0, C_0(1+t)), \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration. De même que dans la section précédente, les $C_k, k=1,2,\dots$ désignent des constantes ne dépendant que de $\max|z_i|, R_0$ et $\|\omega_0\|_{L^1\cap L^\infty}$. Marchioro et Pulvirenti [28] ont mis à profit l'hypothèse de signe sur les intensités d_i pour établir que

$$|z_i(t)| \leq C_1(1+t), \quad \forall i=1,\dots,l. \tag{3.5}$$

Pour obtenir cette estimation, on considère le moment d'inertie associé aux vortex

$$I(t) = \sum_{i=1}^{l} d_i |z_i(t)|^2,$$

qui est une quantité conservée lorsque $\omega \equiv 0$. Dans le cas présent, on a

$$\dot{I}(t) = 2\sum_{i=1}^{l} d_i z_i \cdot \big[v(z_i) + \sum_{j\neq i} d_j K(z_i - z_j)\big] = 2\sum_{i=1}^{l} d_i z_i \cdot v(z_i),$$

après échange des indices i et j dans la double somme. Puisque les d_i sont positifs, l'égalité précédente mène à

$$|\dot{I}(t)| \leq 2\|v\|_{L^\infty} \sum_{i=1}^{l} d_i |z_i(t)| \leq C_2\sqrt{I(t)},$$

d'où

$$I(t) \leq C_3(1+t)^2,$$

et l'on obtient ainsi la borne (3.5) pour chacun des points vortex. Une fois cette borne obtenue, il ne reste plus qu'à récrire la preuve de la Proposition 2.2 du Chapitre 2 pour obtenir la conclusion du Théorème 3.3. □

Dans le cas de plusieurs points, le centre et le moment d'inertie sont définis par

$$c = \int_{\mathbb{R}^2} x\omega_t(x)\,dx + \sum_{i=1}^{l} d_i z_i(t), \quad I = \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2\omega_t(x)\,dx + \sum_{i=1}^{l} d_i |z_i(t)|^2,$$

un calcul rapide montre que ces quantités sont conservées. Par conséquent, lorsque toutes les intensités d_i sont de même signe que ω_0, on obtient l'extension suivante du Théorème 3.2 :

Théorème 3.4. *Soient $\omega_0 \in L^\infty_c(\mathbb{R}^2)$ à support compact et de signe constant positif. Soient $z_1, \dots, z_l$ des points deux à deux distincts et $d_1, \dots, d_l$ des réels tous positifs. Soit $(\omega_t, z_1(t), \dots, z_l(t))$ une solution globale au système mixte Euler-points vortex. Il existe une constante C_0, ne dépendant que de $m_0, i_0, \max|z_i|, R_0$ et $\|\omega_0\|_{L^\infty}$, telle que*

$$\mathrm{supp}\,(\omega_t) \subset B(0, R(t)), \quad \forall t \geq 0,$$

où $t \mapsto R(t)$ est une fonction croissante telle que

$$R(t) \leq C_0(t^{\frac{1}{4}} \ln\ln(t+2) + 1).$$

Remarque 3.3. *Par analogie avec l'hypothèse (i) du Théorème 3.2, il serait naturel d'étudier la généralisation du Théorème 3.4 à la situation où les d_i sont tous de même signe (afin d'assurer l'existence d'une solution globale au système mixte), de signe opposé à celui de ω, et vérifient*

$$\sum_{i=1}^{l} |d_i| = \Big|\sum_{i=1}^{l} d_i\Big| > \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x)\, dx.$$

3.4.2 Le cas de $\omega_0 \in L^1 \cap L^p$, $p > 2$.

Supposons que $\omega_0 \in L^p_c(\mathbb{R}^2)$ avec $p > 2$ et que tous les d_i soient de même signe. Par régularisation de ω_0, il est possible de montrer l'existence d'une solution globale $(\omega_t, z_1(t), \dots, z_l(t))$ au système mixte Euler-points vortex en formulation lagrangienne[28]. Plus précisément, si $\omega_0^\varepsilon \in L^\infty_c(\mathbb{R}^2)$ converge vers ω_0 dans L^p lorsque ε tend vers zéro et si $(\omega_t^\varepsilon, z_1^\varepsilon(t), \dots, z_l^\varepsilon(t))$ désigne une solution correspondante du système mixte Euler-points vortex, on vérifie que les $z_i^\varepsilon(t)$ convergent localement uniformément vers les $z_i(t)$ et ω_t^ε vers ω_t faiblement dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}^2))$. Ceci résulte en particulier de la Proposition 1.3, qui assure que

$$\int_S \frac{|\omega_t^\varepsilon(y)|}{|x-y|}\, dy \leq C\left(\|\omega_t^\varepsilon\|_{L^1(S)}, \|\omega_t^\varepsilon\|_{L^p(S)}\right) = C\left(\|\omega_0^\varepsilon\|_{L^1(S)}, \|\omega_0^\varepsilon\|_{L^p(S)}\right).$$

En particulier, dans toutes les majorations obtenues au cours de la démonstration du Théorème 3.2, la norme $\|\omega_0^\varepsilon\|_{L^\infty}$ peut être remplacée par la norme $\|\omega_0^\varepsilon\|_{L^p}$. Cette dernière étant uniformément bornée en ε, on obtient ainsi l'estimation du Théorème 3.2 pour $\mathrm{supp}\,(\omega_t^\varepsilon)$, où la constante peut être choisie indépendamment de ε. Finalement, la même estimation a lieu pour $\mathrm{supp}\,(\omega_t)$ après passage à la limite.

[28]Cette notion est définie avec précision au Chapitre 1.

Chapitre 4

Nappes de tourbillon et points vortex

4.1 Introduction.

L'objectif de ce bref chapitre est d'établir un résultat d'existence globale pour l'équation d'Euler

$$\partial_t \omega + \operatorname{div}(u\omega) = 0, \quad u = K * \omega,$$

où

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

lorsque la vorticité ω est une mesure de Radon d'une forme particulière. Dans le contexte du théorème de Yudovich, c'est-à-dire lorsque ω appartient à $L^\infty\big(\mathbb{R}_+, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)\big)$, la vitesse $u = K * \omega$ est uniformément bornée et $\operatorname{div}(u\omega)$ est bien une distribution. Comme l'a remarqué Schochet [33, 34], les propriétés de symétrie de K et la formule de Fubini permettent d'écrire $\operatorname{div}(u\omega)$ au sens des distributions sous la forme

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(t,x) \cdot \nabla\varphi(x) \omega(t,x)\, dx = \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} H_\varphi(x,y) \omega(t,x) \omega(t,y)\, dx\, dy, \tag{4.1}$$

pour toute fonction test φ, où la fonction $H_\varphi(\cdot,\cdot)$ définie par

$$H_\varphi(x,y) = \frac{1}{2} K(x-y) \cdot (\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y))$$

est bornée par $C\|D^2\varphi\|_{L^\infty}$ sur $\mathbb{R}^2$, continue en dehors de la diagonale $\Delta = \{(x,x), x \in \mathbb{R}^2\}$, et tend vers zéro à l'infini. Contrairement à l'intégrale simple dans (4.1), la double intégrale est bien définie tant que ω est une mesure de Radon bornée et diffuse. Ceci est le cas par exemple lorsque ω est une mesure de Radon qui en outre appartient à $H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ (nappe de tourbillon). En revanche, lorsque ω comporte une partie atomique, il est nécessaire d'assigner à H_φ une valeur sur la diagonale Δ. Pour cette raison, on remplacera dorénavant K par $\widehat{K}$, où

$$\widehat{K}(x) = K(x) \text{ pour } x \neq 0 \quad \text{et } \widehat{K}(0) = 0.$$

Notre définition de solution généralisée de l'équation d'Euler pour des vorticités de type mesure, qui s'appuie sur la formulation (4.1), est extraite de l'article de Poupaud [32]. On introduit d'abord quelques notations : $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ désigne l'ensemble des mesures de Radon finies sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des mesures positives et finies. L'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ est identifié au dual de l'espace $C_0(\mathbb{R}^2)$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$, tendant vers 0 à l'infini, et est muni de la topologie de la convergence vague (ou faible$*$). L'espace $L^\infty\big(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)\big)$ est identifié au dual de $L^1\big(\mathbb{R}_+, C_0(\mathbb{R}^2)\big)$. Enfin, on notera $C(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2) - \mathrm{w}^*)$ l'ensemble des mesures $\mu \in L^\infty_{\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)\big)$ telles que pour chaque $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^2)$, la fonction $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x)\mu(t,x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x)\mu_t(x)\, dx$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Définition 4.1. *Soit $\mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$. On dit que $\mu \in L^\infty_{\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)\big)$ est solution généralisée (globale) de l'équation d'Euler avec donnée initiale μ_0 si pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$, on a*

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t\varphi(t,x)\, \mu_t(x)\, dx\, dt + \int_0^{+\infty} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} H_\varphi(x,y)\, \mu_t(x)\mu_t(y)\, dx\, dy\, dt + \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(0,x)\mu_0(x)\, dx = 0.$$

Poupaud [32] a établi l'existence d'une solution généralisée globale μ pour n'importe quelle $\mu_0 \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2)$. Ceci comprend en particulier le cas des données initiales de type vortex. La solution obtenue dans [32] vérifie la formulation donnée par la Définition 4.1 à un terme supplémentaire près correspondant à une mesure de défaut concentrée sur la partie atomique de μ. Ce terme ne serait pas observé si H_φ était continue sur la diagonale Δ. L'existence d'une solution globale au sens de la Définition 4.1, sans mesure de défaut, lorsque μ_0 est à support compact et appartient de plus à $H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ est due à Delort [10]. On établira ici le résultat suivant.

Théorème 4.1. *Soit ω_0 une mesure de Radon à support compact, positive, appartenant à $H^{-1}(\mathbb{R}^2)$. Soit $z_0 \in \mathbb{R}^2$ n'appartenant pas au support de ω_0.*

Soit $\gamma \geq 0$ et posons $\mu_0 = \omega_0 + \gamma\delta_{z_0}$. Il existe une solution μ de l'équation d'Euler au sens de la Définition 4.1 telle que $\mu \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2) - \mathrm{w}^*)$ et $\mu(0) = \mu_0$. Cette solution vérifie en outre

$$\mu(t) = \omega(t) + \gamma\delta_{z(t)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

où $z \in C^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ et $\omega \in L^\infty\left(\mathbb{R}_+, H^{-1}(\mathbb{R}^2)\right)$.

Remarque 4.1. *Lorsque $\mu = \omega + \gamma\delta_z$ est solution au sens de la Définition 4.1 et lorsque de plus, il existe $p > 2$ tel que $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^2))$, alors $z \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+)$ et (ω, z) est une solution eulérienne au système mixte Euler-point vortex. Pour le voir, on considère des fonctions test de la forme $\varphi_\delta = \chi_\delta\varphi$, où χ_δ est une fonction de troncature nulle dans un δ-voisinage de $z_\delta(t)$, définie dans l'introduction du Chapitre 1, et z_δ est une approximation régulière de z. Ceci permet d'isoler l'équation vérifiée par ω. Lorsque δ tend vers zéro, les propriétés de χ_δ énoncées au Chapitre 1 combinées avec l'intégrabilité de ω permettent d'établir dans un premier temps l'équation de transport pour ω. Dans un second temps, on détermine l'équation pour $z(t)$ en revenant à la formulation de la Définition 4.1.*

Remarque 4.2. *Les résultats précédents se généralisent au cas de plusieurs points vortex d'intensités toutes du même signe que la partie diffuse ω. Dans ce cas, le fait que la pseudo-énergie soit conservée (voir la Proposition **A**.1) implique que les points vortex restent séparés pour tout temps.*

Remarque 4.3. *Comme nous le verrons au cours de la démonstration du Théorème 4.1, on peut remplacer l'hypothèse que z_0 n'appartient pas au support de ω_0 par celle moins restrictive que* $\ln|z_0 - \cdot|\omega_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$.

4.2 Démonstration du Théorème 4.1.

Pour établir le Théorème 4.1, nous nous appuierons sur l'article de Majda [24] concernant le cas des vorticités sans partie atomique ($\gamma = 0$). Nous nous servirons notamment, de même que dans [24], de la notion de pseudo-énergie définie de la façon suivante.

Soient ω une fonction régulière à support compact et $u = K * \omega = \nabla^\perp\psi$ la vitesse associée, où ψ est la fonction courant vérifiant $\Delta\psi = \omega$ définie dans l'introduction générale. On définit la pseudo-énergie associée à ω par

$$\mathcal{H}(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \ln|x - y|\omega(x)\omega(y)\, dx\, dy.$$

Lorsque $\omega = \omega(t)$ est solution des équations d'Euler, le fait que la pseudo-énergie est conservée est une propriété bien connue. De plus, si ω est de masse totale nulle, la vitesse u appartient à $L^2(\mathbb{R}^2)$ (voir par exemple la Proposition 3.3 de [23]) et une intégration par parties donne alors $\mathcal{H}(\omega) = -\int \psi\omega = \|u\|_{L^2}^2$. Dans le cas contraire, on peut toujours décomposer ω en une somme d'un tourbillon radial et d'un tourbillon de masse totale nulle dont la vitesse correspondante se trouve dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Lorsque $\omega \geq 0$, cette décomposition permet d'obtenir l'estimation suivante (voir par exemple [24], pages 933-934, ou bien [23], pages 439-440) :

$$|\mathcal{H}(\omega)| \leq C, \tag{4.2}$$

où C dépend de $\int \omega, \|\omega\|_{H^{-1}}$ et supp (ω). Une adaptation rapide des calculs effectués à l'aide de cette décomposition dans [24] mène à l'estimation réciproque

$$\|\omega\|_{H^{-1}} \leq C', \tag{4.3}$$

où C' dépend de $\int \omega, |\mathcal{H}(\omega)|$ et $\int |x|^2\omega$. Soulignons le fait important que, contrairement à la première estimation, la seconde ne fait pas intervenir la taille du support de ω.

Sans perte de généralité, on pourra désormais supposer que $\gamma = 1$. Dans tout ce paragraphe, C_0 désignera une constante (pouvant varier d'une ligne à l'autre) ne dépendant que de μ_0.

Première étape : construction d'une suite de solutions approchées.
Le point de départ est la régularisation de la donnée initiale ω_0 : on introduit une approximation $(\rho_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ de l'unité et

$$\omega_{\varepsilon,0} = \rho_\varepsilon * \omega_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2),$$

où $\varepsilon > 0$ est choisi assez petit de sorte que les $\omega_{\varepsilon,0}$ aient un support inclus dans un compact fixe ne rencontrant pas z_0.

Ensuite, le théorème de Marchioro et Pulvirenti [28] assure l'existence d'une solution globale $(\omega_\varepsilon, z_\varepsilon)$ au système mixte Euler-point vortex avec donnée initiale $(\omega_{\varepsilon,0}, z_0)$. Puisque les $\omega_{\varepsilon,0}$ sont positifs, réguliers et à support compact, les $\omega_\varepsilon(t)$ restent positifs, réguliers et à support compact (dont la taille dépend de ε) pour $t \geq 0$. Ceci est une conséquence immédiate du fait que les ω_ε sont transportés par des trajectoires bornées et régulières. On vérifie alors que $\mu_\varepsilon = \omega_\varepsilon + \delta_{z_\varepsilon}$ est solution des équations d'Euler au sens de la Définition 4.1. De plus, d'après la Section 3.2 du Chapitre 3, la masse et le moment angulaire associés à μ_ε sont constants. Puisque $\omega_{\varepsilon,0}$ est uniformément bornée dans $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2)$, on a donc

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega_\varepsilon(t,x)\,dx \leq C_0, \quad \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2\omega_\varepsilon(t,x)\,dx + |z_\varepsilon(t)|^2 \leq C_0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.4}$$

On définit ensuite la pseudo-énergie associée à la vorticité totale μ_ε par

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\omega_\varepsilon, z_\varepsilon)(t) &= -\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{R}^4} \ln|x-y|\omega_\varepsilon(t,x)\omega_\varepsilon(t,y)\,dx\,dy + 2\int_{\mathbb{R}^2} \ln|z_\varepsilon(t)-x|\omega_\varepsilon(t,x)\,dx\right)\\ &= \mathcal{H}(\omega_\varepsilon(t)) - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \ln|z_\varepsilon(t)-x|\omega_\varepsilon(t,x)\,dx.\end{aligned}$$

En l'absence de point vortex, on retrouve bien sûr la pseudo-énergie classique. La Proposition **A**.1, démontrée en annexe de ce chapitre, assure que la pseudo-énergie totale ainsi définie est conservée au cours du temps. Par ailleurs, les hypothèses sur le support de $\omega_{\varepsilon,0}$ impliquent d'une part que

$$\sup_{0<\varepsilon<1} \Big| \int_{\mathbb{R}^2} \ln|z_0 - x|\omega_{\varepsilon,0}(x)\,dx \Big| \leq C_0.$$

D'autre part, puisque $\omega_{\varepsilon,0}$ est uniformément bornée dans $H^{-1}(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$, à support inclus dans un compact fixe, on déduit de (4.2) que $\big|\mathcal{H}(\omega_{\varepsilon,0})\big|$ est uniformément bornée, d'où

$$\sup_{\substack{0<\varepsilon<1 \\ t\in\mathbb{R}_+}} |\mathcal{H}(\omega_\varepsilon, z_\varepsilon)(t)| \leq C_0. \tag{4.5}$$

Deuxième étape : compacité.
D'une part, la mesure $\mu_\varepsilon = \omega_\varepsilon + \delta_{z_\varepsilon}$ est uniformément bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2))$, il existe donc une mesure μ positive telle que μ_ε converge (après extraction d'une sous-suite) vers μ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}(\mathbb{R}^2))$ faible$*$. D'autre part, soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction test. Puisque μ_ε est solution au sens de la Définition 4.1, on a pour $0 \leq s < t \in \mathbb{R}_+$

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x)\mu_\varepsilon(t,x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x)\mu_\varepsilon(s,x)\,dx \Big| \leq C\|D^2\varphi\|_{L^\infty}|t-s|, \tag{4.6}$$

ce qui montre que $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x)\mu_\varepsilon(t,x)\,dx$ est uniformément bornée et équicontinue. Par densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ dans $C_0(\mathbb{R}^2)$, on en déduit qu'il en est de même lorsque $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^2)$. D'après le théorème d'Ascoli, il existe donc une sous-suite (renotée ε) et une mesure de Radon bornée positive ν telle que μ_ε converge vers ν dans $C(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}(\mathbb{R}^2) - \mathrm{w}^*)$. On a alors nécessairement $\nu = \mu$. Par densité de $\mathrm{vect}(C_0(\mathbb{R}^2) \times C_0(\mathbb{R}^2))$ dans $C_0(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$, on vérifie que ceci implique également la convergence du produit tensoriel $\mu_\varepsilon \otimes \mu_\varepsilon$ vers $\mu \otimes \mu$ dans $C(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) - \mathrm{w}^*)$ et dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2))$ faible$*$ (voir par exemple la démonstration du Lemme 3.2 de [33]).

On établit ensuite le fait que $\mu_\varepsilon(t)$ n'a d'autres points de concentration que $z_\varepsilon(t)$ lorsque ε tend vers zéro.

Lemme 4.1. *Il existe une constante C_0 ne dépendant que de μ_0 telle que pour $0 < r < 1/2$, on a*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \sup_{0<\varepsilon<1} \sup_{x_0\in\mathbb{R}^2} \int_{B(x_0,r)} \omega_\varepsilon(t,x)\,dx \leq C_0|\ln r|^{-\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Rappelons que $\omega_\varepsilon \geq 0$. En vertu d'un résultat de [24] (voir page 932), il suffit d'établir une borne uniforme sur $\mathbb{R}_+$ pour la pseudo-énergie $\mathcal{H}(\omega_\varepsilon)$ associée. De même que dans [24], on introduit les fonctions

$$\ln^+(s) = \begin{cases} \ln(s), & s \geq 1 \\ 0, & s < 1 \end{cases}$$

et $\ln^- = \ln^+ - \ln \geq 0$, de sorte que $|\ln| = \ln^+ + \ln^- = 2\ln^+ - \ln$. On voit alors que

$$\begin{aligned}
&\big|\mathcal{H}(\omega_\varepsilon(t))\big| \\
&\quad\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^4} \big(2\ln^+|x-y| - \ln|x-y|\big)\omega_\varepsilon(t,x)\omega_\varepsilon(t,y)\,dx\,dy \\
&\quad= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^4} \ln^+|x-y|\omega_\varepsilon(t,x)\omega_\varepsilon(t,y)\,dx\,dy + \mathcal{H}(\omega_\varepsilon, z_\varepsilon)(t) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \ln|z_\varepsilon(t) - x|\omega_\varepsilon(t,x)\,dx \\
&\quad\leq C_0\Big(1 + \int_{\mathbb{R}^4} \ln^+|x-y|\omega_\varepsilon(t,x)\omega_\varepsilon(t,y)\,dx\,dy + \int_{\mathbb{R}^2} \ln^+|z_\varepsilon(t)-x|\omega_\varepsilon(t,x)\,dx\Big),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (4.5) et le fait que $\ln \leq \ln^+$ dans la dernière inégalité. Finalement, en utilisant le fait que $\ln^+|x-y| \leq |x|^2+|y|^2, \forall x,y \in \mathbb{R}^2$ ainsi que l'estimation (4.4), on trouve

$$\sup_{\substack{\varepsilon>0 \\ t\geq 0}} \big|\mathcal{H}(\omega_\varepsilon)(t)\big| \leq C_0,$$

comme nous le désirions. □

On peut à présent établir de la compacité pour les trajectoires z_ε.

Lemme 4.2. *Il existe $t \mapsto z(t) \in C^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^2)$ et une sous-suite, renotée ε, tels que z_ε converge vers z uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}_+$.*

Démonstration. D'après (4.4), z_ε est uniformément bornée sur $\mathbb{R}_+$. On montre maintenant qu'elle est uniformément équicontinue. Considérons une fonction test $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ positive. D'après (4.6), on a

$$|\varphi(z_\varepsilon(t)) - \varphi(z_\varepsilon(s))| \leq C_0\|D^2\varphi\|_\infty|t-s| + \int_{\mathbb{R}^2}\omega_\varepsilon(t,x)\varphi(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^2}\omega_\varepsilon(s,x)\varphi(x)\,dx.$$

Soient $0<\delta<1$ et $K>1$ des constantes ne dépendant que de μ_0 à déterminer plus tard. Pour t et s vérifiant $|t-s|\leq\delta$, supposons par l'absurde que

$$|z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(s)| > K|t-s|^{\frac{1}{2}}.$$

Posons

$$r = \frac{K\sqrt{|t-s|}}{2}.$$

Quitte à diminuer δ, on peut supposer que $r<1/4$. Ensuite, on choisit comme fonction test

$$\varphi(x) = \varphi_0\left(\frac{x-z_\varepsilon(s)}{r}\right),$$

où φ_0 est une fonction de troncature régulière qui vaut identiquement 1 sur $B(0,1)$ et qui s'annule à l'extérieur de $B(0,2)$. Clairement, on a $\varphi(z_\varepsilon(t))=0$ et $\varphi(z_\varepsilon(s))=1$. D'autre part, le Lemme 4.1 entraîne que

$$\int_{\mathbb{R}^2}\omega_\varepsilon(s,x)\varphi(x)\,dx \leq \int_{B(z_\varepsilon(s),2r)}\omega_\varepsilon(s,x)\,dx \leq C_0|\ln r|^{-\frac{1}{2}},$$

et la même estimation a lieu pour $\omega_\varepsilon(t)$. Finalement, en utilisant le fait que $\|D^2\varphi\|_\infty \leq Cr^{-2}$, on trouve

$$1 \leq C_0|\ln r|^{-\frac{1}{2}} + \frac{C_0}{r^2}|t-s| \leq C_0\big(|\ln r|^{-\frac{1}{2}} + K^{-2}\big),$$

où la constante C_0 ne dépend que de μ_0. On peut alors choisir K assez grand (en fonction de C_0), puis δ assez petit (en fonction de K), de façon à rendre le membre de droite de l'estimation précédente strictement inférieur à 1. Ceci mène à une contradiction, la famille z_ε est donc uniformément équicontinue sur $\mathbb{R}_+$. L'existence de $z\in C^{\frac{1}{2}}$ telle que z_ε converge (après extraction d'une sous-suite) uniformément vers z sur les compacts de $\mathbb{R}_+$ est finalement une conséquence du théorème d'Ascoli combiné à un procédé d'extraction diagonale. □

Lemme 4.3. *Il existe $\omega \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2) - \mathrm{w}^*) \cap L^\infty\big(\mathbb{R}_+, H^{-1}(\mathbb{R}^2)\big)$ et une sous-suite, renotée ε, telle que ω_ε converge vers ω dans $C(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}(\mathbb{R}^2) - \mathrm{w}^*)$. L'estimation du Lemme 4.1 est vérifiée par la mesure ω.*

Démonstration. Posons $\omega(t) = \mu(t) - \delta_{z(t)}$, le seul point à vérifier est le fait que $\omega \in L^\infty\big(\mathbb{R}_+, H^{-1}(\mathbb{R}^2)\big)$. Nous avons vu plus haut que $\big|\mathcal{H}(\omega_\varepsilon(t))\big|$ est uniformément bornée sur $\mathbb{R}_+$. Grâce à (4.3) et (4.4), on trouve alors que ω_ε est uniformément bornée dans $L^\infty\big(\mathbb{R}_+, H^{-1}(\mathbb{R}^2)\big)$. La conclusion s'ensuit. $\square$

Troisième étape : passage à la limite.
On montre finalement que la mesure μ trouvée précédemment est bien solution généralisée de l'équation d'Euler. Il suffit pour cela de s'assurer de la convergence du terme non linéaire

$$\iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^4} H_{\varphi(t,\cdot)}(x,y)\mu_\varepsilon(t,x)\mu_\varepsilon(t,y)\,dx\,dy\,dt \to \iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^4} H_{\varphi(t,\cdot)}(x,y)\mu(t,x)\mu(t,y)\,dx\,dy\,dt$$

lorsque ε tend vers zéro, pour toute fonction test $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$. Or, puisque H_φ s'annule sur la diagonale, on a

$$H_\varphi(x,y)\mu_\varepsilon(x)\mu_\varepsilon(y) = H_\varphi(x,y)\omega_\varepsilon(x)\omega_\varepsilon(y) + H_\varphi(x,z_\varepsilon)\omega_\varepsilon(x) + H_\varphi(z_\varepsilon,y)\omega_\varepsilon(y).$$

Finalement, il suffit de vérifier que pour $T > 0$, $\psi \in C_c^\infty((0,+\infty))$ telle que supp $(\psi) \subset [0,T]$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^4} \psi(t)H_\varphi(x,y)\omega_\varepsilon(t,x)\omega_\varepsilon(t,y)\,dx\,dy\,dt \to \iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^4} \psi(t)H_\varphi(x,y)\omega(t,x)\omega(t,y)\,dx\,dy\,dt \tag{4.7}$$

et

$$\iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2} \psi(t)H_\varphi(x,z_\varepsilon(t))\omega_\varepsilon(t,x)\,dx\,dt \to \iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2} \psi(t)H_\varphi(x,z(t))\omega(t,x)\,dx\,dt. \tag{4.8}$$

Pour établir (4.7), il suffit de rappeler la convergence de $\omega_\varepsilon\otimes\omega_\varepsilon$ vers $\omega\otimes\omega$, l'estimation du Lemme 4.1, puis d'invoquer directement les arguments de Delort [10] (voir aussi [24] ou [33]). On établit (4.8) par des arguments très semblables. Soient $\delta > 0$ un petit paramètre, $\chi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R},[0,1])$ telle que χ_0 s'annule dans un voisinage de zéro et $\chi_\delta(z) = \chi_0(\delta^{-1}|z|)$. Nous allons d'abord vérifier que pour δ fixé, on a

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2} &\psi(t)\chi_\delta(x-z(t))H_\varphi(x,z_\varepsilon(t))\omega_\varepsilon(t,x)\,dx\,dt\\ &= \iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2} \psi(t)\chi_\delta(x-z(t))H_\varphi(x,z(t))\,\omega(t,x)\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{4.9}$$

En effet, on a

$$\iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2} \psi(t)\chi_\delta(x-z(t))H_\varphi(x,z_\varepsilon(t))\omega_\varepsilon(t,x)\,dx\,dt = I_\varepsilon + J_\varepsilon + K_\varepsilon,$$

où

$$\begin{aligned}I_\varepsilon &= \iint \psi(t)\chi_\delta(x-z(t))H_\varphi(x,z(t))\omega_\varepsilon(t,x)\,dx\,dt,\\ J_\varepsilon &= \frac{1}{2}\iint \psi(t)\chi_\delta(x-z(t))K(x-z(t))\cdot\big(\nabla\varphi(z(t)) - \nabla\varphi(z_\varepsilon(t))\big)\omega_\varepsilon(t,x)\,dx\,dt,\end{aligned}$$

et

$$K_\varepsilon = \frac{1}{2}\iint \psi(t)\chi_\delta(x-z(t))\big(K(x-z_\varepsilon(t))-K(x-z(t))\big)\cdot\big(\nabla\varphi(x)-\nabla\varphi(z_\varepsilon(t))\big)\omega_\varepsilon\,dx\,dt.$$

D'une part, en utilisant les estimations pour le noyau de Biot-Savart K établies au Chapitre 1, le théorème des accroissements finis pour $\nabla\varphi$, les estimations uniformes pour ω_ε et les propriétés de support de χ_δ, on obtient

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\big(|J_\varepsilon|+|K_\varepsilon|\big)\le \limsup_{\varepsilon\to 0}\Big(C\delta^{-1}\|D^2\varphi\|_{L^\infty}\sup_{t\in[0,T]}|z(t)-z_\varepsilon(t)|\Big).$$

Le terme de droite est nul d'après le Lemme 4.2. D'un autre côté, puisque la fonction $\psi\chi_\delta(\cdot-z)H_\varphi(\cdot,z)$ appartient à $L^1\big(\mathbb{R}_+,C_0(\mathbb{R}^2)\big)$, la convergence de ω_ε vers ω assure que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2}\psi(t)\chi_\delta(x-z(t))H_\varphi(x,z(t))\,\omega(t,x)\,dx\,dt,$$

et l'on obtient donc (4.9).

Enfin, on a en vertu du Lemme 4.1

$$\sup_{\varepsilon>0}\Big|\iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2}\psi(t)\Big(1-\chi_\delta(x-z(t))\Big)H_\varphi(x,z_\varepsilon(t))\omega_\varepsilon(t,x)\,dx\Big|\le C|\ln\delta|^{-\frac{1}{2}}, \tag{4.10}$$

et la même estimation a lieu en remplaçant ω_ε par ω. Lorsque δ tend vers zéro, (4.9) et (4.10) conduisent à (4.8) et la démonstration du théorème est achevée. □

Annexe.

En conclusion de ce chapitre, on établit la

Proposition A.1. *Soient $\omega_0\in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ à support compact, $\gamma\in\mathbb{R}$ et z_0 un point n'appartenant pas au support de ω_0. Soit $(\omega(t),z(t),\phi_t)$ la solution du système mixte Euler-point vortex avec donnée initiale (ω_0,z_0). On définit la pseudo-énergie*

$$\mathcal{H}(t) = -\frac{1}{2\pi}\Big(\iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2}\ln|x-y|\omega(t,x)\omega(t,y)\,dx\,dy + 2\gamma\int_{\mathbb{R}^2}\ln|z(t)-x|\omega(t,x)\,dx\Big).$$

Alors $\mathcal{H}(t)$ est constante.

Démonstration. On notera ici $\omega_t(x)=\omega(t,x)$ et $u_t(x)=u(t,x)$. Souvenons-nous que le support de ω_t est compact pour tout $t\ge 0$ d'après le Chapitre 3, la pseudo-énergie est donc bien définie. On sait (voir [28], ou bien la Proposition 2.1 du Chapitre 2) que puisque z_0 n'appartient pas au support de ω_0 et puisque celui-ci est compact, il existe $R>0$ tel que

$$|\phi_t(x)-z(t)|\ge R,\quad \forall x\in\operatorname{supp}\omega_0,\quad \forall t\in\mathbb{R}_+,$$

où $R>0$ dépend de ω_0 et de la distance de z_0 au support de ω_0. En particulier les vitesses des trajectoires $\phi_t(x)$ sont uniformément bornées.

Puisque ln n'est pas régulière en 0, on régularise $\mathcal{H}$ de la façon suivante. Soit $\varepsilon > 0$ un petit paramètre vérifiant $\varepsilon < R$. Soit $\ln_\varepsilon$ une fonction régulière sur $\mathbb{R}_+$, coïncidant avec ln sur $[\varepsilon, +\infty)$ et bornée par $\mathcal{O}(|\ln \varepsilon|)$ sur $[0, \varepsilon]$. Posons

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\varepsilon(t) &= -\frac{1}{2\pi}\Big(\iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \ln_\varepsilon |x-y|\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy + 2\gamma\int_{\mathbb{R}^2} \ln|z(t)-x|\omega_t(x)\,dx\Big)\\ &= \mathcal{H}_{1,\varepsilon}(t) + \mathcal{H}_2(t).\end{aligned}$$

Puisque ϕ_t préserve la mesure de Lebesgue, on a

$$\mathcal{H}_{1,\varepsilon}(t) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \ln_\varepsilon |\phi_t(x)-\phi_t(y)|\,\omega_0(x)\,\omega_0(y)\,dx\,dy.$$

Soit

$$K_\varepsilon(z) = \frac{1}{2\pi}\nabla^\perp \ln_\varepsilon |z|,$$

de sorte que $-\frac{1}{2\pi}\nabla \ln_\varepsilon = K_\varepsilon^\perp$ et K_ε tend vers K presque partout lorsque ε tend vers zéro. En utilisant l'EDO vérifiée par $\phi_t(x)$, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{H}_{1,\varepsilon}(t) &= \iint K_\varepsilon^\perp\big(\phi_t(x)-\phi_t(y)\big)\cdot\big(\dot\phi_t(x)-\dot\phi_t(y)\big)\,\omega_0(x)\omega_0(y)\,dx\,dy\\ &= \iint K_\varepsilon^\perp\,(x-y)\cdot\big(u_t(x)-u_t(y)\big)\,\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy\\ &+\gamma\iint K_\varepsilon^\perp\,(x-y)\cdot\big(K(x-z(t))-K(y-z(t))\big)\,\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy\\ &= 2\iint K_\varepsilon^\perp\,(x-y)\cdot u_t(x)\,\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy\\ &+2\gamma\iint K_\varepsilon^\perp\,(x-y)\cdot K\,(x-z(t))\;\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les propriétés de symétrie de K dans la dernière égalité. En insérant la formule de Biot-Savart $u_t = K * \omega_t$, on obtient ensuite par convergence dominée

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0}\iint K_\varepsilon^\perp\,(x-y)\cdot u_t(x)\,\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy &= \lim_{\varepsilon\to0}\int u_t(x)\,\omega_t(x)\cdot\Big(\int K_\varepsilon^\perp(x-y)\omega_t(y)\,dy\Big)\,dx\\ &= \int u_t(x)\cdot u_t^\perp(x)\,\omega_t(x)\,dx\\ &= 0.\end{aligned}$$

De même, on a

$$\lim_{\varepsilon\to0}\iint K_\varepsilon^\perp\,(x-y)\cdot K\,(x-z(t))\;\omega_t(x)\omega_t(y)\,dx\,dy = \int K\,(x-z(t))\cdot u_t^\perp(x)\,\omega_t(x)\,dx,$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{d}{dt}\mathcal{H}_{1,\varepsilon}(t) = 2\gamma\int K\,(x-z(t))\cdot u_t^\perp(x)\,\omega_t(x)\,dx. \tag{a}$$

Par ailleurs, d'après (4.2), $\mathcal{H}_2 \in C^1(\mathbb{R}_+)$ et l'on peut calculer directement en utilisant des changements de variable et les EDO pour $z(t)$ et $\phi_t(x)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{H}_2(t) &= 2\gamma\int K^\perp\,(z(t)-x)\cdot\big(u_t(z(t))-u_t(x)\big)\,\omega_t(x)\,dx\\ &= -2\gamma\int K^\perp\,(z(t)-x)\cdot u_t(x)\,\omega_t(x)\,dx,\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}_2(t) = -2\gamma \int K\left(x - z(t)\right) \cdot u_t^{\perp}(x)\, \omega_t(x)\, dx. \tag{b}$$

En combinant les bornes uniformes (par rapport à ε) pour $|\frac{d}{dt}\mathcal{H}_\varepsilon(t)|$, (a), (b) et la convergence de $\mathcal{H}_\varepsilon(t)$ vers $\mathcal{H}(t)$ pour tout t, on parvient enfin à la conclusion de la proposition. $\square$

Deuxième partie

Une équation de Ginzburg-Landau complexe

Chapitre 5

Problème de Cauchy pour l'équation de Ginzburg-Landau complexe

5.1 Introduction.

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème de Cauchy pour une équation de Ginzburg-Landau complexe

$$(\kappa + i)\partial_t u = \Delta u + u(1 - |u|^2) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N,$$

où $N \geq 1$, u est une fonction à valeurs complexes et κ est positif.

Cette équation est un cas intermédiaire entre l'équation de Gross-Pitaevskii

$$i\partial_t u = \Delta u + u(1 - |u|^2),$$

obtenue en posant $\kappa = 0$, et l'équation de Ginzburg-Landau parabolique. Dans tout ce chapitre, on supposera que κ est un petit paramètre strictement positif, c'est-à-dire que la partie dispersive de l'équation domine la partie de dissipation.

Notons que par conjugaison complexe $u \mapsto \overline{u}$ et par changement d'échelle en temps $t \mapsto (\kappa^2 + 1)t$, l'équation de Ginzburg-Landau complexe se ramène à

$$\partial_t u = (\kappa + i)[\Delta u + u(1 - |u|^2)] \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N, \tag{CGL}$$

version qu'il sera plus commode de considérer ici.

Notations. Tout au long de ce chapitre, on identifiera librement $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$. En particulier, pour $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, on posera $u^\perp = (-u_2, u_1)$, soit en notation complexe $u^\perp = iu$, et pour u et $v \in \mathbb{C}$, on notera $u \cdot v = \mathrm{Re}(u\overline{v})$ le produit scalaire de u et v considérés comme éléments de $\mathbb{R}^2$.

5.1.1 Résultats connus pour l'équation de Ginzburg-Landau complexe.

L'équation (CGL) entre dans une classe plus générale d'équations de Ginzburg-Landau complexes

$$\partial_t u = \gamma u + (a + i\alpha)\Delta u - (b + i\beta)f(u), \tag{5.1}$$

où a, b, α, β et γ sont des paramètres réels tels que $a, b > 0$ et $\gamma \geq 0$, et où la non-linéarité f vérifie certaines hypothèses de croissance. Typiquement, f est donnée par

$$f(u) = u|u|^{2\sigma}, \quad \sigma > 0.$$

L'équation (CGL) est obtenue en prenant $a = b = \gamma = \kappa$, $\alpha = \beta = 1$ et $f(u) = u|u|^2$ (c'est-à-dire $\sigma = 1$) dans (5.1) et en posant

$$u(t, x) = e^{it}v(t, x),$$

où v est une solution de (5.1). Pour l'équation (5.1), le problème de Cauchy a été étudié par Ginibre et Velo dans les articles [56, 57] dont [58] constitue une synthèse. Afin de simplifier la présentation des résultats de [56, 57] et surtout de les relier à l'équation (CGL), nous nous restreindrons au cas $\alpha\beta \geq 0$ et

$$f(u) = u|u|^2, \quad \text{soit } \sigma = 1,$$

cadre qui contient bien sûr (CGL).

L'analyse des questions d'existence et d'unicité dans [56, 57] comporte deux volets.

(1) *Les méthodes de compacité*, utilisées dans [56], permettent d'établir des résultats d'existence globale grâce à des estimations d'énergie et fournissent des solutions obtenues comme limites (faibles) de solutions d'équations régularisées. Ces estimations d'énergie permettent également d'établir l'unicité des solutions sous des hypothèses supplémentaires sur les coefficients α, β, a et b. Celles-ci ne sont pas vérifiées pour (CGL) à cause de l'hypothèse $\kappa << 1$.

Il est à noter que les solutions ainsi obtenues sont plus régulières et davantage intégrables que la donnée initiale, ce qui constitue une caractéristique bien connue de l'équation parabolique. Citons par exemple le résultat suivant pour les espaces locaux.

Théorème 5.1 ([56], Proposition 6.1 pour les espaces locaux)**.** *Soit* $u_0 \in H^1_{\text{loc}} \cap L^4_{\text{loc}}$. *L'équation* (5.1) *admet une solution globale vérifiant*

$$u \in C(\mathbb{R}_+, H^1_{\text{loc}} \cap L^4_{\text{loc}}) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, H^2_{\text{loc}}) \cap L^6_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, L^6_{\text{loc}})$$

telle que $u(0) = u_0$.

Ce résultat ne fournit a priori pas de solution si la donnée initiale appartient seulement à H^1_{loc}. D'après l'inclusion de Sobolev $H^1_{\text{loc}} \subset L^{2^*}_{\text{loc}}$, nous voyons toutefois que $H^1_{\text{loc}} \subset L^4_{\text{loc}}$ dès que $(N-2) \leq 2$. Ceci fait apparaître la notion de criticalité pour l'équation (5.1). En fait, l'exposant $\sigma = 1$ est critique (respectivement sous ou sur-critique) si $N = 4$ (respectivement $N < 4$ ou $N > 4$) pour des données H^1. De manière générale, l'exposant $\sigma \geq 1$ est critique en dimension N telle que $(N-2)\sigma = 2$ pour des données H^1.

(2) *Les méthodes de contraction*, décrites dans [57], consistent à chercher des solutions u en tant que points fixes de l'application

$$\Phi(u) : t \mapsto U(t)u_0 + \int_0^t U(t-s) f(u(s))\, ds, \quad t \geq 0,$$

où $U(t)$ est le semi-groupe engendré par l'équation linéaire correspondant à (5.1). Ce dernier est représenté par la convolution en espace

$$U(t) = \exp(\gamma t + (a + i\alpha)t\Delta) = S(t, \cdot) *_x,$$

où

$$S(t,x) = \frac{1}{(4\pi(a+i\alpha)t)^{\frac{N}{2}}} \exp\big(\gamma t - \frac{|x|^2}{4(a+i\alpha)t}\big), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Puisque $a > 0$, $S(t)$ présente exactement les mêmes propriétés de décroissance gaussienne que le noyau de l'équation de la chaleur. En particulier, $U(t)$ est continu sur les espaces de Lebesgue. Il reste alors à définir un espace normé sur lequel Φ soit une contraction. Par ailleurs, comme nous le verrons par la suite, il peut être intéressant de chercher des solutions qui ne tendent pas vers zéro à l'infini. À cet égard, les espaces uniformément locaux, introduits dans [57], s'avèrent très adéquats. La solution locale ainsi obtenue est ensuite prolongée en une solution globale à l'aide des résultats globaux de la première partie. La méthode de point fixe dans ces espaces présente l'avantage de fournir l'unicité de la solution pour de petites dimensions (cas sous-critique et critique $N \leq 4$), mais ne permet pas d'établir de résultats en grande dimension (cas sur-critique $N > 4$).

5.1.2 L'espace d'énergie associé à l'équation (CGL).

Revenons à présent à (CGL). Notre équation se distingue des équations plus générales par l'existence d'une fonctionnelle coercive qui décroît le long du flot. Cette fonctionnelle, appelée énergie de Ginzburg-Landau, est définie pour un champ $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ par

$$E(u) := \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{(1-|u|^2)^2}{4}\Big]\, dx.$$

Il est par ailleurs connu que cette énergie est conservée par le flot de l'équation de Gross-Pitaevskii. Il est donc naturel d'étudier les questions d'existence et d'unicité dans l'espace d'énergie associé

$$\mathcal{E} := \{u \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N) \quad \text{t.q.} \quad E(u) < +\infty\}.$$

Chercher une solution $u \in \mathcal{E}$ revient en quelque sorte à imposer que $|u|$ tende vers un à l'infini, contrairement aux résultats [56, 57] relatifs aux espaces globaux, pour lesquels les solutions sont nulles à l'infini.

En petite dimension $1 \le N \le 4$, le problème de Cauchy dans l'espace d'énergie pour l'équation de Gross-Pitaevskii a été traité par Gérard [55] puis par Gallo [54] pour des potentiels $f(u)$ plus généraux. Le point de départ consiste à décomposer $\mathcal{E}$ de manière judicieuse afin de le munir d'une structure d'espace métrique complet. Ceci permet ensuite de mettre sur pied une méthode de point fixe utilisant les estimations de Strichartz pour l'opérateur de Schrödinger $\exp(it\Delta)$.

Théorème 5.2 ([55]). *Soit $N = 2$ ou $N = 3$. Pour tout $u_0 \in \mathcal{E}$, il existe une unique solution $u \in C(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ à l'équation de Gross-Pitaevskii avec donnée initiale u_0, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ $E(t) = E(u_0)$. De plus, pour tout $T > 0$, le flot $u_0 \mapsto u, \mathcal{E} \to C([-T, T], \mathcal{E})$ est lipschitzien sur les sous-ensembles bornés de $\mathcal{E}$.*

En dimension $N = 4$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $u_0 \in \mathcal{E}$ avec $E(u_0) \le \delta$, il existe une unique solution globale $u \in C(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ vérifiant de plus $\nabla u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}, L^4(\mathbb{R}^4))$ avec donnée initiale u_0, d'énergie constante et telle que $u_0 \mapsto u$ ait les propriétés de régularité énoncées plus haut.

Puisque nous disposons également des estimations de Strichartz pour l'opérateur $\exp((\kappa + i)t\Delta)$ lorsque $t \ge 0$, ce résultat se transpose à l'équation complexe (CGL) en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}_+$. Grâce à l'effet régularisant de la partie parabolique, on peut en outre établir que la solution est régulière à temps positif.

En dimension supérieure, alors que les méthodes de point fixe échouent, on n'espère pas obtenir de résultat d'unicité et on se restreint à la question de l'existence globale. Comme nous le verrons plus tard, on a en toute dimension l'inclusion

$$\mathcal{E} \subset H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N) \cap L^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N).$$

En particulier, le Théorème 5.1 établit pour $u_0 \in \mathcal{E}$ l'existence d'une solution globale $u \in C\left(\mathbb{R}_+, H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)\right)$ telle que $u(0) = u_0$. Cependant, ce résultat n'assure pas que u reste d'énergie finie.

En alliant les méthodes de point fixe de [55] et celles de compacité de [56], nous obtiendrons le premier résultat suivant.

Théorème 5.3. *Soient $N \geq 1$ et $u_0 \in \mathcal{E}$. L'équation* (CGL) *admet une solution globale $u \in C\left(\mathbb{R}_+, H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)\right)$ telle que $u(0) = u_0$ et $u(t) \in \mathcal{E}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Cette solution vérifie en outre*

$$\nabla u \text{ et } (1 - |u|^2) \in C\left(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N)\right), \quad \Delta u \in L^2_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N)\right), \quad \partial_t u \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N),$$

et enfin

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = -\frac{\kappa}{\kappa^2 + 1} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_t u|^2 \, dx \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}_+).$$

La démonstration de ce théorème, qui sera présentée à la Section 5.2 de ce chapitre, comprend deux étapes. La première consiste à établir l'existence (et l'unicité) de la solution u_η d'une suite d'équations approchant formellement l'équation (CGL) lorsqu'un paramètre η tend vers zéro. Dans la seconde étape, on montre que u_η converge vers une fonction vérifiant les conclusions du Théorème 5.3.

5.1.3 Le cas spécifique de la dimension deux et des données de type vortex.

Dans ce paragraphe, nous nous restreignons au cas bidimensionnel $N = 2$. Au Chapitre 6, nous étudierons un régime particulier pour l'équation (CGL) dans lequel les solutions sont proches de champs appelés « superpositions de vortex »

$$u(z) = \prod_{i=1}^{l} f_{d_i}\left(|z - z_i|\right) \left(\frac{z - z_i}{|z - z_i|}\right)^{d_i}, \quad z \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2.$$

Ici, les points $z_i \in \mathbb{C}$ pour $i = 1, \ldots, l$, les degrés $d_i \in \mathbb{Z}$ et les profils $f_{d_i} : \mathbb{R}_+ \to [0, 1]$ s'annulent à l'origine et tendent vers un à l'infini. Malheureusement, l'énergie de Ginzburg-Landau de ces configurations n'est finie qu'à la condition que le degré total

$$d = \sum_{i=1}^{l} d_i = 0,$$

ce qui restreint l'application du résultat de P. Gérard [55]. Afin de remédier à cette restriction pour l'équation de Gross-Pitaevskii, Bethuel et Smets [44] ont introduit l'espace

$$\mathcal{V} = \{U \in L^\infty(\mathbb{R}^2),\ \nabla^k U \in L^2(\mathbb{R}^2),\ \forall k \geq 2,\ (1 - |U|^2) \in L^2(\mathbb{R}^2) \text{ et } \nabla|U| \in L^2(\mathbb{R}^2)\},$$

qui comprend entre autres toutes les superpositions de vortex, y compris celles pour lesquelles $d \neq 0$. Le résultat de [44] établit le caractère globalement bien posé du problème de Cauchy dans la classe $\mathcal{V} + H^1(\mathbb{R}^2)$. Le caractère global est obtenu à l'aide de la conservation d'une fonctionnelle, finie sur $\mathcal{V} + H^1(\mathbb{R}^2)$, qui s'apparente à l'énergie usuelle de Ginzburg-Landau.

Théorème 5.4 ([44])**.** *Soit $u_0 = U + w_0$ tel que $U \in \mathcal{V}$ et $w_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Il existe une unique solution $u = U + w \in C(\mathbb{R}, \{U\} + H^1(\mathbb{R}^2))$ à l'équation de Gross-Pitaevskii telle que $u(0) = u_0$, et w est l'unique solution dans $C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^2))$ de*

$$\begin{cases} \partial_t w = i[\Delta w + f_U(w)] \\ w(0) = w_0, \end{cases}$$

où

$$f_U(w) = \Delta U + (U+w)(1-|U+w|^2).$$

En outre, l'énergie $E_U(u) := E_U(w)$*, définie par*

$$E_U(u) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\nabla w|^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} \Delta U \cdot w + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(1-|U+w|^2)^2}{4}$$

est conservée au cours du temps.

Remarque 5.1. *Dans [44],* $E_U(u)$ *est appelée énergie renormalisée. Lorsque* $U \in \mathcal{V}$ *vérifie de surcroît* $\nabla U \in L^2(\mathbb{R}^2)$*, on a*

$$E_U(u) = E(u) - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\nabla U|^2}{2},$$

ce qui explique, au moins formellement, que l'énergie renormalisée soit conservée. Le lien entre $E(u)$ *et* $E_U(u)$ *sera présenté plus en détails au Chapitre 6.*

Ce résultat s'étend à l'équation complexe, pour laquelle l'énergie renormalisée est décroissante. En outre, on obtient de la régularité supplémentaire sur les solutions obtenues. La Section 5.3 sera consacrée à la démonstration du résultat suivant.

Théorème 5.5. *Soit* $u_0 = U + w_0$ *appartenant à* $\mathcal{V} + H^1(\mathbb{R}^2)$*. Il existe une unique solution* $u = U + w \in C(\mathbb{R}_+, \{U\} + H^1(\mathbb{R}^2))$ *à* (CGL) *telle que* $u(0) = u_0$*, et* w *est l'unique solution dans* $C(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^2))$ *de*

$$\begin{cases} \partial_t w = (\kappa + i)[\Delta w + f_U(w)] \\ w(0) = w_0. \end{cases}$$

On a en outre

$$w \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*, C^\infty(\mathbb{R}^2))$$

et

$$w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, H^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+^*, L^\infty(\mathbb{R}^2)), \quad \partial_t w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^2)).$$

L'énergie renormalisée $E_U(w)$ *est décroissante et vérifie*

$$\frac{d}{dt} E_U(u(t)) = -\frac{\kappa}{\kappa^2+1} \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_t w|^2 \, dx, \qquad \forall t \geq 0.$$

5.2 Démonstration du Théorème 5.3.

5.2.1 Quelques notations et résultats préliminaires.

Le point de départ consiste à définir une métrique sur $\mathcal{E}$. L'espace de Zhidkov $X^1(\mathbb{R}^N)$ est défini par

$$X^1(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \text{t. q.} \quad \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N)\},$$

et est muni de la norme

$$\|u\|_{X^1} = \|u\|_{L^\infty} + \|\nabla u\|_{L^2}.$$

P. Gérard [55] a démontré l'inclusion $\mathcal{E} \subset X^1 + H^1$. En dimension strictement supérieure à 4, alors que H^1 ne s'inclut pas dans L^4, il convient d'apporter la précision suivante

Lemme 5.1 (cf. [55], Lemme 1). *Pour toute dimension $N \geq 1$ a lieu l'inclusion*

$$\mathcal{E} \subset X^1(\mathbb{R}^N) + H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^4(\mathbb{R}^N),$$

et de plus

$$\|u\|_{X^1+H^1\cap L^4} \leq C\big(1 + E(u)^{1/2}\big)$$

pour une constante C, où l'on définit la norme sur $X^1 + H^1 \cap L^4$ par

$$\|w\|_{X^1+H^1\cap L^4} = \inf\{\|a\|_{X^1} + \|b\|_{H^1} + \|b\|_{L^4} : \ (a, b) \in X^1 \times H^1 \cap L^4, \ w = a + b\}.$$

Démonstration. L'inclusion $\mathcal{E} \subset X^1 + H^1$ est déjà établie au Lemme 1 de [55] avec l'estimation correspondante. Ceci repose sur la décomposition de $u \in \mathcal{E}$ comme

$$u = u_1 + u_2, \quad u_1 = \chi(u)u, \quad u_2 = (1 - \chi(u))u,$$

où $\chi : \mathbb{C} \to [0, 1]$ est une fonction plateau valant identiquement 1 sur $B(0, 2)$ et s'annulant en dehors de $B(0, 3)$. Dans [55], il est établi que $u_1 \in X^1$ et $u_2 \in H^1$ avec les estimations de normes correspondantes. Le seul point à vérifier est donc le fait que $u_2 \in L^4$ et que $\|u_2\|_{L^4} \leq C(1 + E(u)^{1/2})$. Or $|u| \geq 2$ sur le support de u_2, d'où

$$|u_2|^4 \leq 1_{|u|\geq 2}|u|^4 \leq 2(1 - |u|^2)^2,$$

de sorte que $\|u_2\|_{L^4} \leq CE(u)^{1/4}$ et la conclusion s'ensuit. □

Grâce à cette décomposition nous pouvons dès à présent, suivant [55], définir la distance suivante sur $\mathcal{E}$:

$$d_{\mathcal{E}}(u, v) = \|u - v\|_{X^1+H^1\cap L^4} + \||u|^2 - |v|^2\|_{L^2}.$$

On rassemble pour la suite les quelques propriétés suivantes.

Lemme 5.2 ([55], Lemme 2). *Pour tout $N \geq 1$, on a*

$$\mathcal{E} + H^1 \cap L^4(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{E},$$

et de plus pour $v \in \mathcal{E}$ et $w \in H^1 \cap L^4$,

$$\||v + w|^2 - 1\|_{L^2} \leq \||v|^2 - 1\|_{L^2} + C(1 + \sqrt{E(v)})\,(\|w\|_{L^2} + \|w\|_{L^4}) + \|w\|^2_{L^4}.$$

En outre, pour $v, \tilde{v} \in \mathcal{E}$ et $w, \tilde{w} \in H^1 \cap L^4$, on a

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{E}}(v + w, \tilde{v} + \tilde{w}) &\leq C(1 + \|\tilde{w}\|_{H^1\cap L^4})d_{\mathcal{E}}(v, \tilde{v}) \\ &\quad + C(1 + \sqrt{E(v)} + \|w\|_{H^1\cap L^4} + \|\tilde{w}\|_{H^1\cap L^4})\|w - \tilde{w}\|_{H^1\cap L^4}. \end{aligned}$$

Démonstration. La première inégalité est prouvée dans [55] (inégalité (2.2)) et assure le fait que $\mathcal{E} + H^1 \cap L^4 \subset \mathcal{E}$. Pour la deuxième estimation, nous avons d'une part

$$\begin{aligned} \|v - \tilde{v} + w - \tilde{w}\|_{X^1+H^1\cap L^4} &\leq \|v - \tilde{v}\|_{X^1+H^1\cap L^4} + \|w - \tilde{w}\|_{H^1\cap L^4} \\ &\leq d_{\mathcal{E}}(v, \tilde{v}) + \|w - \tilde{w}\|_{H^1\cap L^4}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$|v + w|^2 - |\tilde{v} + \tilde{w}|^2 = |v|^2 - |\tilde{v}|^2 + |w|^2 - |\tilde{w}|^2 + 2\mathrm{Re}(\overline{v}(w - \tilde{w})) - 2\mathrm{Re}(\overline{\tilde{w}}(\tilde{v} - v)),$$

d'où

$$\||v+w|^2-|\tilde{v}+\tilde{w}|^2\|_{L^2} \leq d_{\mathcal{E}}(v,\tilde{v}) + (\|w\|_{L^4}+\|\tilde{w}\|_{L^4})\|w-\tilde{w}\|_{L^4} \\ + 2\|\overline{v}(w-\tilde{w})\|_{L^2} + 2\|\overline{\tilde{w}}(\tilde{v}-v)\|_{L^2}.$$

Mais comme $v \in L^\infty + (L^2 \cap L^4)$ et $w \in L^2 \cap L^4$, on vérifie que

$$\|\overline{v}(w-\tilde{w})\|_{L^2} + \|\overline{\tilde{w}}(\tilde{v}-v)\|_{L^2} \leq \|v\|_{L^\infty+L^4}\|w-\tilde{w}\|_{L^2\cap L^4} + \|v-\tilde{v}\|_{L^\infty+L^4}\|\tilde{w}\|_{L^2\cap L^4} \\ \leq C(1+\sqrt{E(v)})\|w-\tilde{w}\|_{H^1\cap L^4} + \|\tilde{w}\|_{H^1\cap L^4} d_{\mathcal{E}}(v,\tilde{v}).$$

□

Une conséquence immédiate de ce résultat est le

Lemme 5.3. *Pour tout $N \geq 1$, on a $\mathcal{E} + H^1 \cap L^\infty \subset \mathcal{E}$.*
De plus, lorsque $v \in \mathcal{E}$ et $w \in H^1 \cap L^\infty$, on a

$$E(v+w) \leq 2E(v) + C\,(1+E(v))\left(\|w\|_{L^\infty}^2 + \|w\|_{H^1}^2 + \|w\|_{L^\infty}^2\|w\|_{L^2}^2\right).$$

Démonstration. Le fait que $v+w \in \mathcal{E}$ est une conséquence du Lemme 5.2 et de l'inclusion $H^1 \cap L^\infty \subset H^1 \cap L^4$. Par ailleurs, grâce à l'inégalité d'interpolation $\|f\|_{L^4} \leq C\|f\|_{L^\infty}^{1/2}\|f\|_{L^2}^{1/2}$, on obtient, à nouveau grâce au Lemme 5.2,

$$\||v+w|^2-1\|_{L^2} \leq \||v|^2-1\|_{L^2} + C\big(1+\sqrt{E(v)}\big)\left(\|w\|_{L^2} + \|w\|_{L^\infty} + \|w\|_{L^2}\|w\|_{L^\infty}\right),$$

ce qui mène à l'estimation souhaitée. □

On munit alors $\mathcal{E} \cap L^\infty$ de la distance

$$\delta_{\mathcal{E}}(u,v) = d_{\mathcal{E}}(u,v) + \|u-v\|_{L^\infty} \quad \text{pour} \quad u,v \in \mathcal{E} \cap L^\infty,$$

dont nous nous servirons au paragraphe suivant. Notons que $(\mathcal{E} \cap L^\infty, \delta_{\mathcal{E}})$ est un espace complet.

Une autre conséquence du Lemme 5.2 est la

Proposition 5.1. *Soit $u \in \mathcal{E}$. Il existe $u_\eta \in \mathcal{E} \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ tel que*

$$(i) \lim_{\eta\to 0} E(u_\eta) = E(u), \quad (ii) \lim_{\eta \to 0} \|u_\eta - u\|_{H^1\cap L^4} = 0.$$

Démonstration. Pour $u = u_1 + u_2 \in \mathcal{E}$ avec $u_1 \in X^1$ et $u_2 \in H^1 \cap L^4$, posons

$$u_\eta = u_1 + \rho_\eta * u_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^N),$$

où $(\rho_\eta)_{0<\eta<1}$ est une approximation de l'unité. Alors $v_\eta := u_\eta - u$ tend vers zéro dans $H^1 \cap L^4$ quand η tend vers zéro. Par ailleurs, on a $u_\eta = u + v_\eta \in \mathcal{E} + H^1 \cap L^4$, ce qui d'après le Lemme 5.2 assure que $u_\eta \in \mathcal{E}$. Enfin, puisque

$$|u_\eta|^2 - 1 = |u|^2 - 1 + |v_\eta|^2 + 2\mathrm{Re}(\overline{u}v_\eta) \to |u|^2 - 1 \quad \text{dans } L^2$$

et

$$\nabla u_\eta = \nabla u + \nabla v_\eta \to \nabla u \quad \text{dans } L^2,$$

on conclut la démonstration de la proposition. □

On introduit enfin le propagateur $S_\kappa(t)$ associé à l'équation de la chaleur $\partial_t f - \kappa\Delta f = 0$

$$S_\kappa(t,x) = \frac{1}{(4\pi\kappa t)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right), \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^N,$$

qui vérifie

$$\begin{aligned}\|S_\kappa(t,\cdot)\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} &\le \frac{C}{t^{1-1/r}}, \quad \forall 1\le r\le +\infty, \quad \forall t>0,\\ \|\nabla S_\kappa(t,\cdot)\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} &\le \frac{C}{t^{3/2-1/r}},\end{aligned}$$

et dont l'action sur $\mathcal{E}\cap L^\infty$ est décrite par le lemme suivant.

Lemme 5.4. *Soit $u_0 \in \mathcal{E}\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. On a pour $t\ge 0$*

$$\|S_\kappa(t)u_0\|_{L^\infty} \le \|u_0\|_{L^\infty} \quad et \quad \|\nabla S_\kappa(t)u_0\|_{L^2} \le \|\nabla u_0\|_{L^2}.$$

En outre, on a

$$\|S_\kappa(t)u_0 - u_0\|_{L^2} \le C\sqrt{t}\|\nabla u_0\|_{L^2}.$$

En particulier, $t\mapsto S_\kappa(t)u_0 - u_0 \in C(\mathbb{R}_+, H^1\cap L^4)$.

Enfin, on a $t\mapsto S_\kappa(t)u_0 \in C(\mathbb{R}_+,\mathcal{E})$ et

$$E(S_\kappa(t)u_0) \le 2E(u_0) + f_0\left(E(u_0), \|u_0\|_\infty\right)(1+t), \tag{5.2}$$

où $f_0(a,b)$ est une fonction continue de deux variables.

Démonstration. Le fait que $S_\kappa(t)u_0 \in L^\infty\cap\dot{H}^1$ avec les estimations correspondantes résulte de l'inégalité de Young pour la convolution et du fait que $\|S_\kappa(t)\|_{L^1} = 1$.

Par ailleurs, par des estimations directes (voir la démonstration du Lemme 6.2 dans [54]), on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |S_\kappa(t)*u_0 - u_0|^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N}\left|\int_{\mathbb{R}^N} S_\kappa(t,y)(u_0(x-y)-u_0(x))\,dy\right|^2 dx\\ &\le \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} S_\kappa(t,y)\,|u_0(x-y)-u_0(x)|^2\,dy\,dx\\ &\le \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} S_\kappa(t,y)\left|\int_0^1 -y\cdot\nabla u_0(x-sy)\,ds\right|^2 dy\,dx\\ &\le \int_0^1\int_{\mathbb{R}^N} |y|^2 S_\kappa(t,y)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_0(x-sy)|^2\,dx\,dy\,ds.\end{aligned}$$

Puisque $\||y|^2 S_\kappa(t,y)\|_{L^1} = Ct$, on en déduit que $\|S_\kappa(t)u_0 - u_0\|_{L^2} \le C\sqrt{t}\|\nabla u_0\|_{L^2}$ et la deuxième estimation du lemme est vérifiée.

Ensuite, posons $w(t) = S_\kappa(t)u_0 - u_0$ et montrons que $w\in C(\mathbb{R}_+, H^1\cap L^4)$. Le fait que $w\in C(\mathbb{R}_+,H^1)$ découle directement du calcul précédent (pour la continuité en zéro) et de la propriété de semi-groupe pour S_κ (pour la continuité sur $\mathbb{R}_+$ en entier).

Afin d'établir que $w\in C(\mathbb{R}_+,L^4)$, écrivons $u_0 = u_0^1 + u_0^2 \in X^1 + L^4$ et $w(t) = w^1(t)+w^2(t)$ avec $w^j(t) = S_\kappa(t)u_0^j - u_0^j$ pour $j=1,2$. On sait déjà que $w^2\in C(\mathbb{R}_+,L^4)$

puisque $u_0^2 \in L^4$. Pour w^1, remarquons que d'après la propriété de semi-groupe pour S_κ, il suffit de démontrer la continuité en $t = 0$. En utilisant le fait que $\|u_0^1\|_{L^\infty} \leq C$, on trouve

$$\|w^1(t)\|_{L^4} \leq C\|w^1(t)\|_{L^2}^{1/2}\|w^1(t)\|_{L^\infty}^{1/2} \leq C\|w^1(t)\|_{L^2}^{1/2} \leq Ct^{1/4}\|\nabla u_0^1\|_{L^2}^{1/2} \leq Ct^{1/4}\|\nabla u_0\|_{L^2}^{1/2}.$$

Ceci implique que $\|w_1(t)\|_{L^4}$ tend vers zéro avec t.

Il nous reste encore à démontrer que $t \mapsto S_\kappa(t)u_0 \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{E})$. Ici à nouveau, on se contente d'établir la continuité en $t = 0$. Écrivons

$$S_\kappa(t)u_0 = u_0 + (S_\kappa(t)u_0 - u_0)\,.$$

En vertu du Lemme 5.2 on a donc $S_\kappa(t)u_0 \in \mathcal{E}$. D'autre part, en appliquant ce même lemme à $v = u_0$, $w = S_\kappa(t)u_0 - u_0$, $\tilde{v} = u_0$ et $\tilde{w} = 0$ et en utilisant le fait que $w \in C(H^1 \cap L^4)$ on établit le fait que $d_{\mathcal{E}}(u_0, S_\kappa(t)u_0)$ tend vers zéro lorsque t tend vers zéro.

Pour conclure, on applique le Lemme 5.3 à $v := u_0 \in \mathcal{E}$ et $w := S_\kappa(t)u_0 - u_0 \in H^1 \cap L^\infty$, et on obtient l'estimation (5.2). □

5.2.2 Existence globale et unicité pour une équation approchée de (CGL).

Dans tout ce paragraphe, on note $f(u) = u(1 - |u|^2)$ la non-linéarité de (CGL), $(\rho_\eta)_{0<\eta<1}$ désigne une approximation de l'unité, et $C(a_1, \dots, a_l)$ désigne toute constante ne dépendant que de $a_1, \dots, a_l$ et éventuellement amenée à changer d'une ligne à l'autre.

On considère une suite d'équations approchant formellement l'équation (CGL) lorsqu'un paramètre η tend vers zéro :

$$\begin{cases} \partial_t v - \kappa\Delta v = \kappa f(v) + i\rho_\eta * \left[\Delta(\rho_\eta * v) + \rho_\eta * f(v)\right] = g(v) \\ v(0) = v_0 \in \mathcal{E} \cap L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{CGL$_\eta$}$$

On se propose de démontrer la

Proposition 5.2. *Soient $N \geq 1$ et $v_0 \in \mathcal{E} \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Il existe une solution $v = v_\eta \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{E}) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}_+, L^\infty(\mathbb{R}^N)\right)$ de (CGL$_\eta$) telle que $v(0) = v_0$ et telle que l'énergie de v_η est décroissante. De plus, on a $\Delta v \in L^2_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N)\right), f(v) \in L^2_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N)\right)$, $\partial_t v \in L^2\left(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N)\right)$ et*

$$\int_0^t \left(\|\Delta v\|_{L^2}^2 + \|f(v)\|_{L^2}^2\right) \leq C(\kappa, E(v_0))(1+t), \quad \forall t \geq 0, \qquad \int_0^{+\infty} \|\partial_t v\|_{L^2}^2 \leq C(\kappa, E(v_0)).$$

La démonstration repose sur un théorème de point fixe dans $\mathcal{E} \cap L^\infty$: on cherche v en tant que point fixe de l'application

$$\Psi(v) = v_L + \Phi(v) = S_\kappa(t)v_0 + \int_0^t S_\kappa(t-s)g(v(s))\,ds.$$

Ceci requiert quelques estimations préalables pour $v \mapsto g(v)$.

Lemme 5.5. *Pour $v \in \mathcal{E} \cap L^\infty$, on a*

$$\|g(v)\|_{L^\infty} + \|g(v)\|_{L^2} \leq C_1(\eta, \|v\|_\infty, E(v)).$$

De plus, pour $u, v \in \mathcal{E} \cap L^\infty$,

$$\|g(u) - g(v)\|_{L^\infty} + \|g(u) - g(v)\|_{L^2} \leq C_2(\eta, \|(u,v)\|_\infty, E(u), E(v))\delta_{\mathcal{E}}(u,v).$$

Ici C_1 et C_2 désignent des fonctions continues de plusieurs variables et $\delta_{\mathcal{E}}$ est la distance sur $\mathcal{E} \cap L^\infty$ introduite au paragraphe précédent.

Démonstration. Tout d'abord, l'inégalité de Young implique que

$$\begin{aligned}\|g(v)\|_{L^\infty} &\le C\|f(v)\|_{L^\infty} + \|\rho_\eta * (\Delta\rho_\eta * v)\|_{L^\infty}\\ &\le C\left(\|v\|_{L^\infty}(1+\|v\|^2_{L^\infty}) + \|\Delta\rho_\eta\|_{L^1}\|v\|_{L^\infty}\right)\\ &\le C(\eta, \|v\|_{L^\infty}).\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}\|g(v)\|_{L^2} &\le C\left(\|f(v)\|_{L^2} + \|\rho_\eta * (\Delta(\rho_\eta * v))\|_{L^2}\right)\\ &\le C\big(\|v\|_{L^\infty}\|1-|v|^2\|_{L^2} + \sum_{i=1}^N \|\rho_\eta * (\partial_i\rho_\eta * \partial_i v)\|_{L^2}\big)\\ &\le C\left(\|v\|_{L^\infty}E(v)^{\frac{1}{2}} + \|\nabla\rho_\eta\|_{L^1}\|\nabla v\|_{L^2}\right)\\ &\le C(\eta, \|v\|_\infty, E(v)),\end{aligned}$$

ce que démontre la première estimation du lemme. Par ailleurs, on a

$$\|g(u)-g(v)\|_{L^2\cap L^\infty} \le C\left(\|f(u)-f(v)\|_{L^2\cap L^\infty} + \|\rho_\eta * [\Delta(\rho_\eta * (u-v))]\|_{L^2\cap L^\infty}\right).$$

D'un côté, puisque

$$f(u)-f(v) = (u-v)(1-|u|^2) + v(|v|^2-|u|^2),$$

on obtient immédiatement

$$\|f(u)-f(v)\|_{L^\infty} \le C(\|(u,v)\|_{L^\infty})\|u-v\|_{L^\infty} \le C(\|(u,v)\|_{L^\infty})\delta_{\mathcal{E}}(u,v).$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned}\|f(u)-f(v)\|_{L^2} &\le C\left(\|u-v\|_{L^\infty}E(u)^{\frac{1}{2}} + \|v\|_{L^\infty}\||v|^2-|u|^2\|_{L^2}\right)\\ &\le C(E(u), \|v\|_{L^\infty})\delta_{\mathcal{E}}(u,v).\end{aligned}$$

Enfin, on vérifie aussi que

$$\begin{aligned}\|\rho_\eta * [\Delta(\rho_\eta * (u-v))]\|_{L^\infty\cap L^2} &\le C(\eta)\left(\|u-v\|_{L^\infty} + \|\nabla(u-v)\|_{L^2}\right)\\ &\le C(\eta)\delta_{\mathcal{E}}(u,v),\end{aligned}$$

et la conclusion s'ensuit. □

Muni du Lemme 5.5, on peut établir un premier résultat local d'existence et d'unicité.

Lemme 5.6. *Soient $N \ge 1$ et $R > 0$. Il existe $T = T(\eta, R) > 0$ tel que pour tout $v_0 \in \mathcal{E} \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ tel que $\|v_0\|_{L^\infty} + E(v_0) \le R$, l'équation* (CGL$_\eta$) *admette une unique solution $v \in C([0,T], \mathcal{E}) \cap L^\infty([0,T], L^\infty(\mathbb{R}^N))$ vérifiant $v(0) = v_0$.*

Démonstration. On a $\|v_0\|_{L^\infty} + E(v_0) \le R$. Alors

$$3R + 2f_0(E(v_0), \|v_0\|_{L^\infty}) \le C(R),$$

où f_0 est définie au Lemme 5.4, et où $C(R)$ ne dépend que de R. On pose $\tilde{R} = C(R)$. En vertu du même Lemme 5.4, il existe $T(R) > 0$ tel que

$$\sup_{t\in[0,T(R)]} \big(E(S_\kappa(t)v_0) + \|S_\kappa(t)v_0\|_{L^\infty}\big) \leq \tilde{R}. \tag{5.3}$$

On peut supposer que $T(R) < 1$.

Ensuite, pour $0 < T \leq T(R)$, on définit

$$X_T = \{v \in C([0,T],\mathcal{E}) \text{ t.q. } v - S_\kappa(t)v_0 \in C([0,T],L^\infty) \text{ et } \sup_{t\in[0,T]} \big(E(v(t)) + \|v(t)\|_{L^\infty}\big) \leq 4\tilde{R}\}.$$

Première étape : il existe $T(\eta,R) \leq T(R)$ tel que $\Psi(X_{T(\eta,R)}) \subset X_{T(\eta,R)}$.
En effet, lorsque $v \in X_T$, on a pour $0 < T \leq T(R)$ et $t \in [0,T]$

$$\|\Psi(v)(t)\|_{L^\infty} \leq \|S_\kappa(t)v_0\|_{L^\infty} + \|\Phi(v)(t)\|_{L^\infty}.$$

D'après l'inégalité de Young pour la convolution et le Lemme 5.5,

$$\|\Phi(v)(t)\|_{L^\infty} \leq C\int_0^t \|g(v(s))\|_\infty \, ds \leq C(R,\eta)t,$$

d'où, d'après (5.3),

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\Psi(v)(t)\|_{L^\infty} \leq \tilde{R} + C(R,\eta)T. \tag{5.4}$$

D'autre part, l'inégalité de Young puis le Lemme 5.5 donnent

$$\|\Phi(v)(t)\|_{H^1} \leq \int_0^t \big(\|S_\kappa(t-s)\|_{L^1} + \|\nabla S_\kappa(t-s)\|_{L^1}\big)\|g(v(s))\|_{L^2} \, ds \leq C(\eta,R)\sqrt{t}.$$

En appliquant le Lemme 5.3 à $v := S_\kappa(t)v_0 \in \mathcal{E}$ et $w := \Phi(v)(t) \in H^1 \cap L^\infty$, on trouve par ailleurs

$$\begin{aligned} E(\Psi(v)(t)) &\leq 2E(S_\kappa(t)v_0) \\ &\quad + C\big(1 + E(S_\kappa(t)v_0)\big)\left(\|\Phi(v)(t)\|_{H^1}^2 + \|\Phi(v)(t)\|_{L^\infty}^2 + \|\Phi(v)(t)\|_{H^1}^2\|\Phi(v)(t)\|_{L^\infty}^2\right). \end{aligned}$$

De par les estimations précédentes pour $\|\Phi(v)(t)\|_{L^\infty\cap H^1}$ et (5.3), on obtient ainsi

$$\sup_{t\in[0,T]} E(\Psi(v)(t)) \leq 2\tilde{R} + C(R,\eta)T. \tag{5.5}$$

D'après les estimations (5.4) et (5.5), il est clair que si $T \leq T(\eta,R)$ est assez petit,

$$\sup_{t\in[0,T]} \big(E(\Psi(v)(t)) + \|\Psi(v)(t)\|_{L^\infty}\big) \leq 4\tilde{R}.$$

Enfin, une rapide adaptation des calculs précédents montre que $\Phi(v) \in C([0,T],H^1 \cap L^\infty)$. Par conséquent, les Lemmes 5.2 et 5.4 nous assurent que $\Psi(v) \in C([0,T],\mathcal{E})$, d'où le fait que Ψ laisse X_T stable.

Seconde étape : quitte à diminuer $T(\eta,R)$, Ψ est une contraction sur $X_{T(\eta,R)}$.
En effet, en appliquant le Lemme 5.2 et en tenant compte du fait que $E(S_\kappa(t)v_0) \leq C(R)$, $\|\Phi(u)(t)\|_{H^1\cap L^4}$ et $\|\Phi(v)(t)\|_{H^1\cap L^4} \leq C(R,\eta)$ pour $t \leq T(R,\eta)$, on trouve

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{E}}\left(\Psi(u)(t),\Psi(v)(t)\right) &= \|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{L^\infty} + d_{\mathcal{E}}(S_\kappa(t)v_0 + \Phi(u)(t), S_\kappa(t)v_0 + \Phi(v)(t)) \\ &\leq \|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{L^\infty} + C(R,\eta)\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{H^1\cap L^4} \\ &\leq C(R,\eta)\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{H^1\cap L^\infty}, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient de l'inégalité d'interpolation $\|f\|_{L^4} \leq C(\|f\|_{L^2} + \|f\|_{L^\infty})$. D'un autre côté, on a d'après l'inégalité de Young

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{H^1 \cap L^\infty} &\leq C \int_0^t (1 + (t-s)^{-1/2}) \|g(u(s)) - g(v(s))\|_{L^2 \cap L^\infty}\, ds \\ &\leq C(\eta, R)\sqrt{t} \sup_{s\in[0,t]} \delta_{\mathcal{E}}\left(u(s), v(s)\right),\end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte de la seconde estimation du Lemme 5.5. Finalement, on obtient

$$\sup_{t\in[0,T]} \delta_{\mathcal{E}}\left(\Psi(u)(t), \Psi(v)(t)\right) \leq C(\eta, R)\sqrt{T} \sup_{t\in[0,T]} \delta_{\mathcal{E}}\left(u(t), v(t)\right).$$

Il suffit de choisir $T(\eta, R)$ assez petit pour que $C(\eta, R) T(\eta, R)^{1/2} < 1$ et la preuve du Lemme 5.6 est achevée. $\square$

L'effet régularisant de l'équation de la chaleur se traduit par le résultat suivant.

Lemme 5.7. *Soit $v \in C([0,T], \mathcal{E}) \cap C((0,T], L^\infty)$ la solution de* (CGL$_\eta$) *fournie par le Lemme 5.6. Alors $\Delta v \in C((0,T], L^2) \cap L^1((0,T), L^2)$.*

De plus, $t \mapsto E(v(t))$ est décroissante sur $[0,T]$.

Démonstration. Rappelons que $v(t) = S_\kappa(t) v_0 + \Phi(v)(t)$. D'une part, puisque $\nabla v_0 \in L^2$ on a $t \mapsto \Delta(S_\kappa(t) v_0) \in C((0,T], L^2)$.

D'autre part, fixons $0 < t_0 \leq T$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < t_0$. Pour $t > t_0$ tel que $t - t_0 < \varepsilon$, on a

$$\begin{aligned}\Phi(v)(t) - \Phi(v)(t_0) &= \int_0^{t_0-\varepsilon} \big(S_\kappa(t-s) - S_\kappa(t_0-s)\big) g(v)(s)\, ds \\ &\quad + \int_{t_0-\varepsilon}^{t} S_\kappa(t-s) g(v)(s)\, ds - \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} S_\kappa(t_0-s) g(v)(s)\, ds.\end{aligned}$$

En premier lieu, on a d'après le Lemme 5.4

$$\begin{aligned}&\Big\| \int_0^{t_0-\varepsilon} \Delta\Big(\big(S_\kappa(t-s) - S_\kappa(t_0-s)\big) g(v)(s)\Big)\, ds \Big\|_{L^2} \\ &\quad = \Big\| \int_0^{t_0-\varepsilon} \Delta\Big(S_\kappa(t-t_0) S_\kappa(t_0-s) g(v)(s) - S_\kappa(t_0-s) g(v)(s)\Big)\, ds \Big\|_{L^2} \\ &\quad \leq C\sqrt{t-t_0} \int_0^{t_0-\varepsilon} \|\nabla\Delta\big(S_\kappa(t_0-s) g(v)(s)\big)\|_{L^2}\, ds \\ &\quad \leq C\sqrt{t-t_0} \int_0^{t_0-\varepsilon} \|\nabla\Delta S_\kappa(t_0-s)\|_{L^1} \|g(v)(s)\|_{L^2}\, ds \\ &\quad \leq C(\varepsilon)\sqrt{t-t_0},\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Young ainsi que le fait que $\|\nabla\Delta S_\kappa(t_0-s)\|_{L^1} \leq C(\varepsilon)$ lorsque $|t_0 - s| \geq \varepsilon$.

Afin d'estimer les deux autres termes dans l'expression ci-dessus pour $\Phi(v)(t) - \Phi(v)(t_0)$, on vérifie que

$$\|\nabla g(v)\|_{L^2} \leq C\|\nabla f(v)\|_{L^2} + C(\eta)\|\nabla v\|_{L^2} \leq C(\eta, \|v\|_{L^\infty})\|\nabla v\|_{L^2} \leq C(\eta, R).$$

Par conséquent, les estimations pour ∇S_κ impliquent que

$$\begin{aligned}
&\big\|\Delta \int_{t_0-\varepsilon}^{t} S_\kappa(t-s)g(v)(s)\,ds\big\|_{L^2} + \big\|\Delta \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} S_\kappa(t_0-s)g(v)(s)\,ds\big\|_{L^2} \\
&\quad \le C\int_{t_0-\varepsilon}^{t} \|\nabla S_\kappa(t-s)\|_{L^1}\|\nabla g(v)(s)\|_{L^2}\,ds + C\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} \|\nabla S_\kappa(t_0-s)\|_{L^1}\|\nabla g(v)(s)\|_{L^2}\,ds \\
&\quad \le C(\eta,R)\big(\sqrt{t-t_0}+\sqrt{\varepsilon}\big).
\end{aligned}$$

Finalement, en faisant tendre d'abord t vers t_0 puis ε vers zéro, on obtient que $\Delta\Phi(v)(t) \to \Delta\Phi(v)(t_0)$ dans L^2, d'où le fait que $\Delta v \in C((0,T],L^2)$.

Par ailleurs, des estimations similaires impliquent que pour $t \in (0,T]$,

$$\|\Delta v(t)\|_{L^2} \le \|\nabla S_\kappa(t)\|_{L^1}\|\nabla v_0\|_{L^2} + C(\eta,R)t^{1/2} \le C(\eta,R)(t^{-1/2}+t^{1/2}),$$

soit $\Delta v \in L^1((0,T),L^2)$.

Ensuite, comme Δv et $g(v) \in C((0,T],L^2)$, on voit en revenant à l'équation (CGL$_\eta$) que $\partial_t v \in C((0,T],L^2)$. On peut donc calculer pour $t \in (0,T]$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(v(t)) &= -\int_{\mathbb{R}^N} \partial_t v \cdot \{\Delta v + v(1-|v|^2)\}\,dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \{\kappa\Delta v + g(v)\}\cdot\{\Delta v + f(v)\}\,dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \{\kappa\Delta v + \kappa f(v) + (\rho_\eta * [\Delta(\rho_\eta * v) + \rho_\eta * f(v)])^\perp\}\cdot\{\Delta v + f(v)\}\,dx \\
&= -\kappa\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v + f(v)|^2\,dx + \mathcal{R}(\eta,v),
\end{aligned}$$

où

$$\mathcal{R}(\eta,v) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\eta * [\Delta(\rho_\eta * v) + \rho_\eta * f(v)]\cdot\{\Delta v + f(v)\}^\perp\,dx.$$

En fait, on a $\mathcal{R}(\eta,v) = 0$. En effet, posons $\omega = \Delta v + f(v) \in L^2$ et $\omega_\eta = \rho_\eta * \omega$. Puisque $\Delta v \in L^2$, on a $\Delta(\rho_\eta * v) = \rho_\eta * \Delta v$ dans L^2. On trouve donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\eta,v) &= \int_{\mathbb{R}^N} \{\rho_\eta * (\rho_\eta * \omega)\}\cdot\omega^\perp\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\eta(x-y)\omega_\eta(y)\cdot\omega^\perp(x)\,dy\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \omega_\eta(y)\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\eta(y-x)\omega^\perp(x)\,dx\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \omega_\eta(y)\cdot\omega_\eta^\perp(y)\,dy = 0,
\end{aligned}$$

ce que l'on voulait démontrer.

On a ainsi établi que $dE(v)/dt \in L^1((0,T))$ et $dE(v)/dt \le 0$ sur $(0,T]$. D'un autre côté, on a $v = v_0 + \big(S_\kappa(\cdot)v_0 - v_0 + \Phi(v)\big) \in \{v_0\} + C([0,T],H^1\cap L^4)$ d'après les Lemmes 5.4 et 5.6. Il suffit alors d'invoquer les estimations du Lemme 5.2 pour en déduire la continuité de $t \mapsto E(v)(t)$. Par conséquent on obtient la décroissance de $t \mapsto E(v)(t)$ sur $[0,T]$. $\square$

Lemme 5.8. *Soit $v \in C([0,T],\mathcal{E}) \cap C((0,T],L^\infty)$ la solution de* (CGL$_\eta$) *fournie par le Lemme 5.6. Alors $\nabla v \in C((0,T],H^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Il suffit de raisonner par récurrence sur k et de transcrire les arguments de la démonstration du Lemme 5.7 menant au fait que $\Delta v \in C((0,T],L^2)$. □

Dans un second temps, on cherche un contrôle en norme L^∞ de la solution obtenue.

Lemme 5.9. *Soit $v \in C([0,T],\mathcal{E}) \cap C((0,T],L^\infty)$ la solution de* (CGL$_\eta$) *fournie par le Lemme 5.6. Il existe une constante $C = C(\eta,R)$ telle que*

$$\|v(t)\|_{L^\infty} \leq C(\eta,R), \quad \forall t \in [0,T].$$

Démonstration. On tire parti du signe de la non-linéarité $f(v)$ d'une part et d'estimations uniformes (par rapport à $\|v\|_{L^\infty}$) pour $g(v)$ d'autre part. Remarquons que puisque $v = v_1 + v_2 \in L^\infty + L^4$, on a $f(v) = v_1(1-|v|^2) + v_2(1-|v|^2)$, par conséquent l'inégalité de Hölder implique que

$$\|f(v)\|_{L^2+L^{4/3}} \leq \|1-|v|^2\|_{L^2}(\|v_1\|_{L^\infty} + \|v_2\|_{L^4}) \leq C(1+E(v)),$$

où la seconde inégalité est due à l'estimation du Lemme 5.1.

Puisque $\sup_{t\in[0,T]} E(v(t)) \leq E(v_0) \leq R$, on a donc

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\nabla v(t)\|_{L^2}^2 \leq 2R, \qquad \sup_{t\in[0,T^*)} \|f(v)(t)\|_{L^2+L^{4/3}} \leq C(1+R).$$

Ensuite, le Lemme 5.8 assure que $v \in C((0,T],C^\infty)$, l'équation (CGL$_\eta$) est donc vérifiée au sens classique dans $(0,T]\times\mathbb{R}^N$. En formant le produit scalaire de cette dernière avec v dans $\mathbb{R}^2$, on obtient

$$\partial_t r - \kappa\Delta r = 2\kappa v\cdot f(v) + 2v\cdot h(v) - |\nabla v|^2,$$

où $r = |v|^2$ et $h(v) = \rho_\eta * [\Delta(\rho_\eta * v) + \rho_\eta * f(v)]^\perp$. D'après l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned} v\cdot h(v) \leq |v|\|h(v)\|_{L^\infty} &\leq C|v|\left(\|\rho_\eta * f(v)\|_{L^\infty} + \|\Delta(\rho_\eta * v)\|_{L^\infty}\right) \\ &\leq C|v|\big(\|\rho_\eta\|_{L^2\cap L^4}\|f(v)\|_{L^2+L^{4/3}} + \|\nabla\rho_\eta\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2}\big) \\ &\leq C(\eta,R)|v|, \end{aligned}$$

d'où

$$\partial_t r - \kappa\Delta r \leq 2\kappa r(1-r) + C(\eta,R)\sqrt{r},$$

et la conclusion du lemme résulte du principe du maximum. □

Démonstration de la Proposition 5.2.
Soit $v_0 \in \mathcal{E}\cap L^\infty$ et $v \in C((0,T^*),\mathcal{E}\cap L^\infty)$ la solution maximale de (CGL$_\eta$) correspondante. D'après le Lemme 5.6, si $T^* < +\infty$ on a nécessairement

$$\limsup_{t\to T^*} \big(E(v(t)) + \|v(t)\|_{L^\infty}\big) = +\infty.$$

Ceci est exclu comme l'attestent les Lemmes 5.7 et 5.9, et l'on conclut que $T^* = +\infty$.

En vertu du Lemme 5.7, on a ensuite $v \in C(\mathbb{R}_+^*, L^\infty \cap \mathcal{E}) \cap C(\mathbb{R}_+^*, \dot{H}^2)$ et par conséquent $f(v) \in C(\mathbb{R}_+^*, L^2)$. Il s'agit d'établir des bornes dans ces espaces, dépendant de $E(v_0)$ mais uniformes en η. D'après la démonstration du Lemme 5.7, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(v(t)) &= -\kappa \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v + f(v)|^2 \, dx \\ &= -\kappa \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\Delta v|^2 + |f(v)|^2\right) dx - 2\kappa \int_{\mathbb{R}^N} \Delta v \cdot f(v) \, dx \\ &= -\kappa \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\Delta v|^2 + |f(v)|^2\right) dx + 2\kappa \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 (1 - |v|^2) \, dx - \kappa \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla |v|^2|^2 \, dx,\end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue par intégration par parties. Puisque κ est positif, ceci implique que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(v(t)) &\leq -\kappa \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\Delta v|^2 + |f(v)|^2\right) dx + 2\kappa \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \, dx \\ &\leq -\kappa \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\Delta v|^2 + |f(v)|^2\right) dx + 4\kappa E(v_0).\end{aligned}$$

On trouve ainsi

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\Delta v|^2 + |f(v)|^2\right) dx \leq C(\kappa, E(v_0))(1+t).$$

Finalement, en revenant à l'identité

$$\kappa \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta v + f(v)|^2 \, dx = E(v_0) - E(v(t)) \leq E(v_0),$$

et en observant que

$$\|\partial_t v\|_{L^2} \leq \kappa \|\Delta v + f(v)\|_{L^2} + \|\rho_\eta * \rho_\eta * (\Delta v + f(v))\|_{L^2} \leq (\kappa + 1)\|\Delta v + f(v)\|_{L^2},$$

on obtient

$$\int_0^{+\infty} \|\partial_t v\|_{L^2}^2 \leq \frac{(\kappa+1)^2}{\kappa} E(v_0).$$

La Proposition 5.2 est démontrée. □

5.2.3 Compacité, convergence et démonstration du Théorème 5.3.

À l'aide des estimations obtenues pour les solutions construites au paragraphe précédent, on obtient le résultat suivant.

Proposition 5.3. *Soient $u_0 \in \mathcal{E}$ et $u_{0,\eta} \in \mathcal{E} \cap L^\infty$ définie par la Proposition 5.1. Soit $u_\eta \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{E} \cap L^\infty)$ la solution de (CGL_η) avec donnée initiale $u_{0,\eta}$ déterminée par la Proposition 5.2. Il existe une suite $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et il existe $u \in C(\mathbb{R}_+, L^2_{\mathrm{loc}}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, H^1_{\mathrm{loc}})$ telle que u_{η_k} converge vers u dans $C(\mathbb{R}_+, L^2_{\mathrm{loc}})$.*

De plus, on a $|u|^2 - 1$ et $\nabla u \in C\left(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N) - \mathrm{w}\right)$, $f(u)$ et $\Delta u \in L^2_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N)\right)$, $\partial_t u \in L^2\left(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N)\right)$ et enfin $\sup_{t \geq 0} E(u(t)) \leq E(u_0)$.

Ici, $C(\mathbb{R}_+, L^2 - \mathrm{w})$ désigne l'espace des fonctions à valeurs dans L^2 continues pour la topologie faible sur L^2.

Démonstration. Par hypothèse, u_η vérifie $\sup_{t\geq 0} E(u_\eta(t)) \leq E(u_{\eta,0})$. Or $u_0 \in \mathcal{E}$, donc l'énergie $E(u_{\eta,0})$ est bornée uniformément en η d'après la Proposition 5.1. Le Lemme 5.1 assure que u_η est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, X^1 + H^1 \cap L^4)$, donc dans $L^\infty(H^1_{\mathrm{loc}})$, et par conséquent $f(u_\eta)$ est bornée dans $L^\infty(L^2 + L^{4/3})$. Par ailleurs, la Proposition 5.2 assure que $\partial_t u_\eta$ est bornée dans $L^2(L^2)$. Grâce à l'injection compacte de H^1_{loc} dans L^2_{loc}, le lemme d'Aubin-Lions (voir par exemple le Corollaire 4 de [73]) et un argument d'extraction diagonale entraînent alors que u_η est relativement compacte dans $C(L^2_{\mathrm{loc}})$.

Soit $u \in C(L^2_{\mathrm{loc}}) \cap L^\infty(H^1_{\mathrm{loc}})$ une valeur d'adhérence de u_η ainsi obtenue. Quitte à extraire, on peut supposer que u_η tend vers u presque partout dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$. Il en résulte en particulier que $f(u_\eta)$ tend vers $f(u)$ dans L^1_{loc} et presque partout.

Par ailleurs, puisque $|u_\eta|^2 - 1$ et ∇u_η sont bornées dans $L^\infty(L^2)$, la convergence de u_η vers u dans $C(L^2_{\mathrm{loc}})$ implique aussi que $|u|^2 - 1, \nabla u \in C(L^2 - \mathrm{w})$ et

$$|u_\eta(t)|^2 - 1 \rightharpoonup |u(t)|^2 - 1, \quad \nabla u_\eta(t) \rightharpoonup \nabla u(t) \text{ dans } L^2 - \mathrm{w}, \quad \forall t \geq 0,$$

d'où le fait que

$$E(u(t)) \leq \liminf_{\eta\to 0} E(u_\eta(t)) \leq \liminf_{\eta\to 0} E(u_{0,\eta}) = E(u_0).$$

Enfin, on obtient aussi à la limite $\partial_t u \in L^2(L^2)$ et $\Delta u, f(u) \in L^2_{\mathrm{loc}}(L^2)$. □

Le Théorème 5.3 sera finalement une conséquence immédiate de la

Proposition 5.4. *Soit $u_0 \in \mathcal{E}$. La fonction u trouvée dans la Proposition 5.3 est une solution de l'équation* (CGL) *au sens des distributions sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$ telle que $u(0) = u_0$. De plus, on a $u \in C(\mathbb{R}_+, H^1_{\mathrm{loc}})$, $\nabla u, (1 - |u|^2) \in C(\mathbb{R}_+, L^2)$, et enfin*

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = -\frac{\kappa}{\kappa^2+1}\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_t u|^2\,dx \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}_+).$$

Démonstration. Puisque u_η converge fortement vers u dans L^2_{loc}, il est clair que $\partial_t u_\eta$, $\rho_\eta * \Delta(\rho_\eta * u_\eta)$ et Δu_η convergent vers $\partial_t u$ et Δu au sens des distributions dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$. Par ailleurs, le fait que $f(u_\eta)$ converge fortement vers $f(u)$ dans L^1_{loc} implique que $f(u_\eta)$ et $\rho_\eta * (\rho_\eta * f(u_\eta))$ convergent vers $f(u)$ au sens des distributions dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$. Ensuite, on sait grâce à la Proposition 5.3 que $u_\eta(0)$ tend vers $u(0)$ dans L^2_{loc} fort. D'un autre côté, la Proposition 5.1 atteste que $u_\eta(0) = u_{0,\eta}$ converge vers u_0 dans $H^1 \cap L^4$. Il est alors clair que $u(0) = u_0$.

Il nous reste encore à établir la continuité en temps. La Proposition 5.3 garantit d'une part que $u \in C(L^2_{\mathrm{loc}})$ et $\nabla u \in C(L^2 - \mathrm{w})$. D'autre part, puisque $\partial_t u, \Delta u$ et $f(u) \in L^2_{\mathrm{loc}}(L^2)$, on a

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u|^2}{2}\,dx = -\int_{\mathbb{R}^N} \partial_t u \cdot \Delta u\,dx \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+),$$

ce qui implique que $t \mapsto \|\nabla u\|_{L^2}$ est continue, d'où le fait que $u \in C(H^1_{\mathrm{loc}})$ et $\nabla u \in C(L^2)$. De même, on a $(1 - |u|^2) \in C(L^2 - \mathrm{w})$. Par ailleurs,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(1 - |u|^2)^2}{4}\,dx = -\int_{\mathbb{R}^N} \partial_t u \cdot f(u)\,dx \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+),$$

donc $t \mapsto \|1-|u|^2\|_{L^2}$ est continue. Ceci entraîne que $(1-|u|^2) \in C(L^2)$.

Finalement, on voit que puisque $\partial_t u \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$,

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = -\int_{\mathbb{R}^N} \partial_t u \cdot (\Delta u + f(u))\, dx = -\frac{\kappa}{\kappa^2+1}\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_t u|^2\, dx \in L^1(\mathbb{R}_+),$$

ce qui termine la démonstration de la proposition et conclut cette section. □

5.3 Démonstration du Théorème 5.5.

Cette section est consacrée à la démonstration du Théorème 5.5. Nous cherchons la solution $w \in C\left(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^2)\right)$ de

$$\begin{cases} \partial_t w = (\kappa+i)\big(\Delta w + f_U(w)\big), \\ w(0) = w_0 \in H^1(\mathbb{R}^2), \end{cases} \tag{CGL}$$

où

$$f_U(w) = \Delta U + (U+w)(1-|U+w|^2), \quad U \in \mathcal{V},$$

et κ est strictement positif.

Introduisons le semi-groupe $S(t,x)$ associé à l'équation homogène linéaire correspondante[29]. Celui-ci s'écrit

$$S(t,x) = \frac{1}{4\pi(\kappa+i)t}\exp\left(\frac{-|x|^2}{4(\kappa+i)t}\right),$$

et vérifie pour $1 \leq r \leq +\infty$

$$\|S(t,\cdot)\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{C_\kappa}{t^{1-1/r}}, \quad \forall t > 0, \tag{5.6}$$

et

$$\|D^k S(t,\cdot)\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{C_\kappa}{t^{|k|/2+1-1/r}}, \quad \forall t > 0. \tag{5.7}$$

Il est à noter que la constante C_κ diverge lorsque κ tend vers zéro.

Dans un premier temps, on établira un résultat d'existence locale pour (CGL).

Proposition 5.5. *Soit $R > 0$. Pour tout $w_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tel que $\|w_0\|_{H^1} \leq R$, il existe $T = T(R) > 0$ et une unique solution $w \in C([0,T], H^1(\mathbb{R}^2))$ à l'équation* (CGL) *telle que $w(0) = w_0$.*

Démonstration. Notre intention est d'appliquer une méthode de point fixe à l'application $\psi : w \in H^1(\mathbb{R}^2) \mapsto \psi(w)$, où

$$\psi(w)(t) = S(t) * w_0 + \int_0^t S(t-s) * g_U(w(s))\, ds,$$

avec

$$g_U = (\kappa+i) f_U.$$

Dans cette optique, on introduit, pour $T > 0$,

$$B(T,R) = \{w \in L^\infty([0,T], H^1(\mathbb{R}^2)) \text{ t.q. } \|w\|_{L^\infty(H^1)} \leq (2C_\kappa+1)R\},$$

[29] $S(t)$ dépend de κ, mais n'est pas le semi-groupe $S_\kappa(t)$ de la section précédente.

où C_κ est la constante apparaissant dans (5.6)-(5.7). Il est alors possible de choisir $T = T(R)$ de sorte que ψ laisse $B(T(R), R)$ stable et soit une contraction sur cet ensemble.

En effet, soient $T > 0$ et $w \in B(T, R)$. En utilisant le fait que $H^1(\mathbb{R}^2)$ s'injecte continûment dans $L^p(\mathbb{R}^2)$ pour tout $2 \leq p < +\infty$, ainsi que le fait que U appartient à $\mathcal{V}$, on peut montrer[30] en développant $f_U(w)$ que

$$\|f_U(w)\|_{L^\infty([0,T],L^2)} \leq C(U, R), \tag{5.8}$$

et pour $w_1, w_2 \in B(T, R)$

$$\|f_U(w_1) - f_U(w_2)\|_{L^\infty([0,T],L^2)} \leq C(U, R)\|w_1 - w_2\|_{L^\infty([0,T],H^1)}. \tag{5.9}$$

L'inégalité de Young nous donne ensuite

$$\begin{aligned}
\|\psi(w)(t)\|_{H^1} &\leq \|\psi(w)(t)\|_{L^2} + \|\nabla\psi(w)(t)\|_{L^2} \\
&\leq 2\|S(t)\|_{L^1}\|w_0\|_{H^1} + \int_0^t \|S(t-s) + \nabla S(t-s)\|_{L^1}\|g_U(w(s))\|_{L^2}\, ds \\
&\leq 2C_\kappa\|w_0\|_{H^1} + C\int_0^t \big(1 + (t-s)^{-1/2}\big)\|g_U(w(s))\|_{L^2}\, ds,
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle des inégalités (5.6) et (5.7). D'après (5.8) et (5.9), on obtient alors

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\psi(w)(t)\|_{H^1} \leq 2C_\kappa\|w_0\|_{H^1} + C(U, R)(T + \sqrt{T}),$$

ainsi que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\psi(w_1)(t) - \psi(w_2)(t)\|_{H^1} \leq C'(U, R)(T + \sqrt{T}) \sup_{t\in[0,T]} \|w_1(t) - w_2(t)\|_{H^1}.$$

Il suffit dès lors de choisir $T = T(R)$ assez petit pour que $C(U, R)(T + \sqrt{T}) \leq R$ et $C'(U, R)(T + \sqrt{T}) < 1$. La proposition est établie. □

Lemme 5.10. *Soit* $w \in C\left([0, T], H^1(\mathbb{R}^2)\right)$ *une solution de* (CGL). *Alors*

$$w \in L^1_{\mathrm{loc}}\left([0, T], H^2(\mathbb{R}^2)\right) \cap C\left((0, T], H^2(\mathbb{R}^2)\right),$$

et par conséquent

$$w \in L^1_{\mathrm{loc}}\left([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^2)\right).$$

Démonstration. Soit $i = 1$ ou $i = 2$. D'une part, le Lemme 2 de [44] nous fournit la décomposition

$$\partial_i f_U(w) = g_1(w) + g_2(w) \in L^\infty\left([0, T], L^2(\mathbb{R}^2)\right) + L^\infty\left([0, T], L^r(\mathbb{R}^2)\right)$$

pour tout $1 < r < 2$. De plus, on a

$$\sup_{s\in[0,T]} \Big(\|g_1(w)(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|g_2(w)(s)\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}\Big) \leq C(U, A(T), r),$$

[30] Voir le Lemme 1 dans [44].

où $A(T) = \sup_{s\in[0,T]} \|w(s)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}$. D'autre part, en dérivant deux fois la formule de Duhamel satisfaite par w, on trouve

$$\partial_{ij} w(t) = \partial_j S(t) * \partial_i w_0 + \int_0^t \partial_j S(t-s) * (\kappa + i)\partial_i f_U(w)(s)\, ds.$$

Compte tenu de la décomposition $\partial_i f_U = g_1 + g_2$, on obtient

$$\begin{aligned}\|\partial_{ij} w(t)\|_{L^2} \le \|\nabla S(t)\|_{L^1} \|\nabla w_0\|_{L^2} + C \int_0^t \|\nabla S(t-s)\|_{L^1} \|g_1(s)\|_{L^2}\, ds \\ + C \int_0^t \|\nabla S(t-s)\|_{L^\alpha} \|g_2(s)\|_{L^r}\, ds,\end{aligned}$$

où α est tel que $1 + 1/2 = 1/\alpha + 1/r$. D'après (5.7), ceci mène finalement à

$$\|\partial_{ij} w(t)\|_{L^2} \le C t^{-1/2} \|w_0\|_{H^1} + C(U, A(T), r) \int_0^t \Big((t-s)^{-1/2} + (t-s)^{-1/2-1+1/\alpha} \Big)\, ds.$$

Puisque $1/2 + 1 - 1/\alpha = 1/r < 1$, on conclut que le membre de droite est fini et par conséquent $\partial_{ij} w(t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ pour tout $t \in (0, T]$. La continuité en temps à valeurs dans L^2 est obtenue de manière tout à fait semblable. □

À $w \in H^1$ est associée l'énergie renormalisée

$$E_U(w) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\nabla w|^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} \Delta U \cdot w + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(1 - |U + w|^2)^2}{4}.$$

On vérifie que $E_U(w)$ est finie lorsque $U \in \mathcal{V}$.

Lemme 5.11. *Soit $w \in C\big([0,T], H^1(\mathbb{R})\big)$ une solution de* (CGL). *Pour tout $t \in (0, T]$, on a*

$$\frac{d}{dt} E_U(w)(t) \le 0.$$

De plus, il existe une constante C_{U,w_0} ne dépendant que de U et $\|w_0\|_{H^1}$ telle que

$$\|w(t)\|_{H^1} \le C_{U,w_0} \exp(C_{U,w_0} t), \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{5.10}$$

Démonstration. En premier lieu, on déduit de (CGL) et du Lemme 5.10 que $\partial_t w$ appartient à $L^\infty_{\mathrm{loc}}\big((0,T], L^2(\mathbb{R}^2)\big)$, on peut donc calculer

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} E_U(w(t)) &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla w \cdot \nabla \partial_t w - \Delta U \cdot \partial_t w - \partial_t w \cdot (U + w)(1 - |U + w|^2) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^2} \partial_t w \cdot (\Delta w + f_U(w)) = -\int_{\mathbb{R}^2} \partial_t w \cdot (\frac{1}{\kappa + i} \partial_t w) \\ &= -\frac{\kappa}{\kappa^2 + 1} \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_t w|^2 \le 0.\end{aligned}$$

Afin d'établir (5.10), on calcule

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} w \cdot \partial_t w = \int_{\mathbb{R}^2} w \cdot [(\kappa + i)\Delta w] + \int_{\mathbb{R}^2} w \cdot [(\kappa + i) f_U(w)],$$

soit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = -\kappa\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla w|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} w\cdot(\kappa+i)\Delta U$$
$$+\int_{\mathbb{R}^2} w\cdot[(\kappa+i)(U+w)(1-|U+w|^2)].$$

Ensuite, on décompose le dernier terme du membre de droite comme

$$\int_{\mathbb{R}^2} w\cdot[(\kappa+i)(U+w)(1-|U+w|^2)]$$
$$=\int_{\mathbb{R}^2} w\cdot[(\kappa+i)U(1-|U+w|^2)] + \kappa\int_{\mathbb{R}^2}|w|^2(1-|U+w|^2).$$

D'une part, le second terme du membre de droite est majoré par $\kappa\|w(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$. D'autre part, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au premier terme, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^2} w\cdot[(\kappa+i)(U+w)(1-|U+w|^2)] \leq C(U)\|w(t)\|_{L^2}V(t)^{1/2} + \kappa\|w(t)\|^2_{L^2},$$

où le potentiel $V(t)$ est défini par

$$V(t) = \int_{\mathbb{R}^2}(1-|U+w(t)|^2)^2.$$

On trouve ainsi

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C(U)\big(\|w(t)\|^2_{L^2} + 1 + V(t)\big). \tag{5.11}$$

D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$E_U(w)(t) \geq \int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\nabla w|^2}{2}\,dx - C(U)\|w(t)\|_{L^2} + \frac{V(t)}{4},$$

d'où, puisque $E_U(w)$ est décroissante,

$$\frac{V(t)}{4} + \int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\nabla w|^2}{2} \leq E_U(w_0) + C(U)\|w(t)\|_{L^2}. \tag{5.12}$$

On déduit alors de (5.11) et (5.12) que

$$\|w(t)\|_{L^2} \leq (1+\|w_0\|_{H^1})\exp(Ct),$$

et finalement, on obtient l'inégalité (5.10) en utilisant à nouveau (5.12). □

Du Lemme 5.11 découle la

Proposition 5.6. *Soit $w_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Il existe une unique solution globale $w \in C\left(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^2)\right)$ à l'équation* (CGL) *telle que $w(0) = w_0$.*

Démonstration. Il s'agit d'un argument standard de prolongement de la solution. Soit $w \in C\big([0,T^*), H^1(\mathbb{R}^2)\big)$ l'unique solution maximale avec donnée initiale w_0. Si T^* était fini, on aurait d'après (5.10)

$$\limsup_{t\to T^*}\|w(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq C(U,T^*,w_0) < +\infty,$$

de sorte que d'après la Proposition 5.5 on pourrait prolonger w sur un intervalle de la forme $[0, T^*+\delta]$, avec δ strictement positif. Ceci contredirait la maximalité de w. □

Nous concluons cette section par le résultat suivant.

Proposition 5.7. *Soit* $w \in C\left(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^2)\right)$ *solution de* (CGL)*. Alors*

$$w \in C^\infty\left(\mathbb{R}_+^*, C^\infty(\mathbb{R}^2)\right).$$

Démonstration. On procède en plusieurs étapes.

Première étape. Soient $p \geq 2$ et $v \in H^p(\mathbb{R}^2)$. Alors $D^k f_U(v) \in L^2(\mathbb{R}^2) + L^{4/3}(\mathbb{R}^2)$ pour tout multi-indices k de longueur $|k| \leq p$.

Démonstration de la première étape. D'après la preuve du Lemme 5.10, on peut supposer directement que $|k| \geq 2$. Écrivons

$$f_U(v) = \Delta U + h_U(v),$$

où

$$h_U(v) = (U+v)(1 - |U+v|^2).$$

Puisque $U \in \mathcal{V}$, il nous suffit de vérifier que $D^k h_U(v) \in L^2(\mathbb{R}^2) + L^{4/3}(\mathbb{R}^2)$. En appliquant la formule de Leibniz à $h_U(v)$, on obtient

$$\begin{aligned} D^k h_U(v) &= \sum_{m \leq k} \tbinom{k}{m} D^{k-m}(U+v) D^m(1 - |U+v|^2) \\ &= D^k(U+v) - \sum_{\substack{m \leq k \\ n \leq m}} \tbinom{k}{m}\tbinom{m}{n} D^{k-m}(U+v) D^n(U+v) \cdot D^{m-n}(U+v). \end{aligned}$$

Comme $2 \leq |k| \leq p$, $v \in H^p(\mathbb{R}^2)$ et $U \in \mathcal{V}$, on obtient sans peine que $D^k(U+v) \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Pour le second terme du membre de droite, on remarque que chaque produit apparaissant dans la somme est de la forme

$$D^a(U+v) D^b(U+v) \cdot D^c(U+v),$$

où les multi-indices a, b et c vérifient $|a| + |b| + |c| = |k| \geq 2$. On examine ensuite tous les cas possibles. On observe que $D^a(v+U)$ appartient à $H^1(\mathbb{R}^2)$, et donc à $L^4(\mathbb{R}^2)$, dès que $1 \leq |a| \leq p-1$, alors que $D^a(v+U)$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^2)$ pour $2 \leq |a| \leq p$. Par ailleurs, puisque $U + v \in L^\infty$, on obtient

$$D^a(U+v) D^b(U+v) \cdot D^c(U+v) \in L^2(\mathbb{R}^2) + L^{4/3}(\mathbb{R}^2),$$

et la conclusion s'ensuit.

Deuxième étape. Soit $w \in C\left(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^2)\right)$ solution de (CGL). Pour tout $p \geq 1$, on a $w \in C\left(\mathbb{R}_+^*, H^p(\mathbb{R}^2)\right)$.

Démonstration de la deuxième étape. On procède par récurrence sur p. Puisque le cas $p = 2$ a déjà été traité au Lemme 5.10, on suppose directement que $w \in C\left(\mathbb{R}_+^*, H^p(\mathbb{R}^2)\right)$ pour un $p \geq 2$. Soit k un multi-indices tel que $|k| \leq p+1$. Par dérivation de la formule de Duhamel, on trouve

$$D^k w(t) = D^k(S(t) * w_0) + D^k \int_0^t S(t-s) * g_U(w(s))\, ds,$$

soit

$$D^k w(t) = D^k S(t) * w_0 + \int_0^{t/2} D^k S(t-s) * g_U(w(s))\, ds$$
$$+ \int_{t/2}^{t} D^m S(t-s) * D^{k-m} g_U(w(s))\, ds,$$

où m est un multi-indices de longueur $|m| = 1$, choisi de sorte que $|k-m| = |k| - 1$.

Tout d'abord, on sait que $t \mapsto D^k S(t) * w_0$ appartient à $C\left(\mathbb{R}_+^*, L^2(\mathbb{R}^2)\right)$. Ensuite, en utilisant le fait que $g_U(w)$ appartient à $C\left(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^2)\right)$ ainsi que l'inégalité (5.7) avec $r = 1$, on obtient

$$\Big\| \int_0^{t/2} D^k S(t-s) * g_U(w(s))\, ds \Big\|_{L^2} \leq C \int_0^{t/2} (t-s)^{-|k|/2}\, ds \leq C t^{-|k|/2+1}.$$

D'autre part, puisque $|k-m| = |k|-1 \leq p$ et puisque par hypothèse $w \in C\left(\mathbb{R}_+^*, H^p(\mathbb{R}^2)\right)$, on déduit de la première étape que

$$D^{k-m} g_U(s) = d^1(s) + d^2(s),$$

où d^1 et d^2 appartiennent à $C\left(\mathbb{R}_+^*, L^2(\mathbb{R}^2)\right)$ et $C\left(\mathbb{R}_+^*, L^{4/3}(\mathbb{R}^2)\right)$ respectivement. On déduit alors de (5.7) que

$$\begin{aligned}
&\Big\| \int_{t/2}^{t} D^m S(t-s) * D^{k-m} g_U(s)\, ds \Big\|_{L^2} \\
&\quad\leq \int_{t/2}^{t} \Big(\|\nabla S(t-s)\|_{L^1} \|d^1(s)\|_{L^2} + \|\nabla S(t-s)\|_{L^r} \|d^2(s)\|_{L^{\frac{4}{3}}} \Big)\, ds \\
&\quad\leq C(t) \int_{t/2}^{t} \Big((t-s)^{-1/2} + (t-s)^{-1/2-1+1/r} \Big)\, ds,
\end{aligned}$$

où r vérifie $1 + 1/2 = 1/r + 3/4$. Le dernier terme du membre de droite est fini car $1/2 + 1 - 1/r = 3/4 < 1$. Par conséquent $w(t) \in H^{p+1}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $t > 0$. La continuité en temps s'obtient avec les mêmes arguments.

Troisième étape. Soit $w \in C\left(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^2)\right)$ solution de (CGL). Alors $w \in C^k\left(\mathbb{R}_+^*, C^l(\mathbb{R}^2)\right)$ pour tous k et l entiers.

Démonstration de la troisième étape. Pour k et $l \in \mathbb{N}$ fixés, on démontre par récurrence sur $0 \leq j \leq k$ que $w \in C^j\left(\mathbb{R}_+^*, C^{l+2k-2j}(\mathbb{R}^2)\right)$.

Ceci a bien lieu pour $j = 0$ au vu de la deuxième étape et de l'injection de Sobolev. Ensuite, on suppose que $w \in C^j\left(\mathbb{R}_+^*, C^{l+2k-2j}(\mathbb{R}^2)\right)$ pour un $0 \leq j \leq k-1$, alors on a

$$\Delta w,\ f_U(w) \in C^j\left(\mathbb{R}_+^*, C^{l+2k-2j-2}(\mathbb{R}^2)\right).$$

Ainsi, en revenant à l'équation (CGL), on obtient

$$w \in C^{j+1}\left(\mathbb{R}_+^*, C^{l+2k-2j-2}(\mathbb{R}^2)\right),$$

et la démonstration de la Proposition 5.7 est achevée. □

Chapitre 6

Dynamique des points vortex dans l'équation de Ginzburg-Landau complexe

Ce chapitre est inclus dans [70].

6.1 Introduction.

Le présent chapitre est dévolu à l'étude de la dynamique des points vortex pour une équation de Ginzburg-Landau complexe posée dans le plan

$$\frac{\delta}{|\ln\varepsilon|}\partial_t u_\varepsilon + i\partial_t u_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2}u_\varepsilon(1-|u_\varepsilon|^2), \quad (\mathrm{GLC})_\varepsilon$$

où $u_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est à valeurs complexes. Ici, δ et ε désignent des paramètres réels positifs, et on posera dans la suite $\kappa_\varepsilon = \delta|\ln\varepsilon|^{-1}$. Il s'agit d'une équation intermédiaire entre l'équation de Gross-Pitaevskii, obtenue avec $\delta = 0$, et l'équation de Ginzburg-Landau parabolique.

Nous nous focaliserons sur un régime asymptotique obtenu lorsque ε tend vers zéro à paramètre δ fixé, dans lequel les solutions de $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$ peuvent comprendre des zéros, appelés vortex. Dans ce régime, un exemple typique de fonctions u_ε est formé par les superpositions de vortex

$$u_\varepsilon^*(z_i,d_i)(z) := \prod_{i=1}^{l} u_{\varepsilon,d_i}(z-z_i) = \prod_{i=1}^{l} f_{1,d_i}\left(\frac{|z-z_i|}{\varepsilon}\right)\left(\frac{z-z_i}{|z-z_i|}\right)^{d_i}, \quad z\in\mathbb{C},$$

où $z_i \in \mathbb{C}$, $d_i \in \mathbb{Z}$, et les profils $f_{d_i} : \mathbb{R}^+ \mapsto [0,1]$, qui satisfont $f_{d_i}(0) = 0$ et $f_{d_i}(+\infty) = 1$, ont été définis à la seconde section de l'introduction générale. Les points z_i sont appelés vortex des champs u_ε^* et les d_i leurs degrés. Cette classe de fonctions n'est généralement pas invariante par le flot de $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$, mais elle en reste proche en un certain sens[31] lorsque ε tend vers zéro. En particulier, il est encore possible de définir une notion asymptotique de points vortex pour les solutions de $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$ et d'étudier la dynamique de ces points. Nous verrons que cette dynamique est déterminée par un système d'équations différentielles ordinaires, du moins jusqu'au premier temps de collision entre les points vortex.

Dans ce contexte, deux concepts permettant de décrire la position et les degrés des vortex sont la vorticité[32]

$$J(u_\varepsilon) = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,(iu_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon) = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,(j(u_\varepsilon))$$

d'une part, et l'énergie de Ginzburg-Landau

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^2} e_\varepsilon(u_\varepsilon)\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} [\frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{2} + \frac{(1-|u_\varepsilon|^2)^2}{4\varepsilon^2}]\,dx,$$

par le biais de la densité d'énergie $e_\varepsilon(u_\varepsilon)$, d'autre part. Dans le régime que nous considérerons, les solutions vérifieront

$$\frac{e_\varepsilon(u_\varepsilon)}{|\ln\varepsilon|}\,dx \rightharpoonup \pi\sum_{i=1}^{l}\delta_{z_i} \quad \text{et} \quad J(u_\varepsilon)\,dx \rightharpoonup \pi\sum_{i=1}^{l} d_i\delta_{z_i}$$

[31] Voir la notion de très bonne préparation définie à la Section 6.1.2.
[32] cf. le paragraphe 6.2.1.

lorsque ε tend vers zéro. La notion de densité d'énergie $e_\varepsilon(u_\varepsilon)$ a été spécifiquement utilisée pour l'équation de Ginzburg-Landau parabolique, et celle de vorticité $J(u_\varepsilon)$ pour l'équation de Gross-Pitaevskii. Pour l'équation complexe, nous nous servirons simultanément de ces deux notions.

Pour l'équation de Gross-Pitaevskii comme pour l'équation de Ginzburg-Landau parabolique, la dynamique des vortex a été amplement étudiée dans la littérature (voir [48, 52, 63, 68] pour l'équation de Gross-Pitaevskii) dans le cas d'un domaine borné, périodique ou dans le domaine $\mathbb{R}^2$ en entier. Ici, nous nous placerons dans le cadre du plan $\mathbb{R}^2$ en entier, qui est celui traité par Bethuel, Jerrard et Smets [48] pour l'équation de Gross-Pitaevskii. Lorsque le degré total $d = \sum d_i$ est non nul, l'énergie de Ginzburg-Landau des superpositions de vortex $u^*_\varepsilon(z_i, d_i)$ est infinie. Il s'agit pourtant d'un outil essentiel, tant dans la résolution du problème de Cauchy pour l'équation que dans l'étude de la dynamique des vortex en tant que telle. Nous utiliserons donc une notion apparentée d'énergie, qui hérite des principales propriétés de l'énergie de Ginzburg-Landau : l'énergie renormalisée, introduite par Bethuel et Smets [44] et déjà évoquée au Chapitre 5. Notre définition de très bonne préparation des données, ainsi qu'une partie considérable de notre analyse, est inspirée de [48].

6.1.1 Énergie renormalisée et problème de Cauchy.

Comme nous l'avons mentionné, lorsque $d = \sum d_i \neq 0$ l'énergie de Ginzburg-Landau des superpositions de vortex $u^*_\varepsilon(z_i, d_i)$ est infinie. Ceci est dû au comportement du gradient de la phase à l'infini ; en effet, on peut vérifier sans peine que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla |u^*_\varepsilon(z_i, d_i)||^2 + \frac{(1 - |u^*_\varepsilon(z_i, d_i)|^2)^2}{2\varepsilon^2}\, dz < +\infty,$$

alors que lorsque $|z| \to +\infty$,

$$|\nabla u^*_\varepsilon(z_i, d_i)|^2(z) \sim d^2/|z|^2,$$

de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u^*_\varepsilon(z_i, d_i)|^2 = +\infty.$$

L'énergie introduite dans [44] puis utilisée dans [48] est obtenue en ôtant la partie divergente du gradient de la phase à l'infini. Plus exactement, soit une fonction régulière U_d telle que

$$U_d = \left(\frac{z}{|z|}\right)^d \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \setminus B(0, 1).$$

On vérifie alors que $|\nabla u^*_\varepsilon(z_i, d_i)|^2 \sim_{|z|\to+\infty} |\nabla U_d|^2$ et que la quantité

$$\mathcal{E}_{\varepsilon, U_d}(u^*_\varepsilon(z_i, d_i)) := \lim_{R\to+\infty} \int_{B(R)} \left[e_\varepsilon(u^*_\varepsilon(z_i, d_i)) - \frac{|\nabla U_d|^2}{2} \right] dx \tag{6.1}$$

est finie.

De plus, on constate que U_d, ainsi que tous les champs $u^*_\varepsilon(z_i, d_i)$, sont des éléments de l'ensemble

$$\mathcal{V} = \{U \in L^\infty(\mathbb{R}^2),\ \nabla^k U \in L^2(\mathbb{R}^2),\ \forall k \geq 2,\ (1 - |U|^2) \in L^2(\mathbb{R}^2) \text{ et } \nabla|U| \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$$

introduit dans [44]. Le Théorème 5.5 du Chapitre 5 établissant le caractère globalement bien posé du problème de Cauchy dans l'espace $\{U\} + H^1(\mathbb{R}^2)$ pour tout $U \in \mathcal{V}$, on peut dès lors obtenir une unique solution dans $\{u_\varepsilon^*(z_i, d_i)\} + C(H^1(\mathbb{R}^2))$ pour toutes les superpositions $u_\varepsilon^*(z_i, d_i)$ ainsi que pour leurs perturbations dans $H^1(\mathbb{R}^2)$.

À degré total $d = \sum d_i$ fixé, on voudrait résoudre le problème de Cauchy dans une classe $\{U\} + C(H^1(\mathbb{R}^2))$, où $U \in \mathcal{V}$, contenant simultanément *toutes* les superpositions $u_\varepsilon^*(z_i, d_i)$. L'analyse de [48] révèle cependant que $u_\varepsilon^*(z_i, d_i)$ n'appartient à $\{U_d\} + H^1(\mathbb{R}^2)$ qu'à la condition que $\sum d_i z_i = 0$. On a pourtant $u_\varepsilon^*(z_i, d_i) \in \{U_d\} + \dot{H}^1(\mathbb{R}^2)$. Ceci amène à introduire une relation d'équivalence sur $\mathcal{V}$ comme suit : lorsque U et $U' \in \mathcal{V}$, on dit que $U \sim U'$ si et seulement si

$$\deg_\infty(U) = \deg_\infty(U') \text{ et } |\nabla U|^2 - |\nabla U'|^2 \in L^1(\mathbb{R}^2),$$

et l'on désigne par $[\cdot]$ la classe d'équivalence correspondante. On observe alors que $[U_d]$ contient toutes les superpositions de vortex u_ε^* de degré total d.

Au Chapitre 5, on a défini l'énergie renormalisée d'une solution $u = U+w \in C(\mathbb{R}_+, \{U\}+H^1(\mathbb{R}^2))$ par

$$E_{\varepsilon,U}(u) = \int_{\mathbb{R}^2} \Big[\frac{|\nabla w|^2}{2} - \Delta U \cdot w + \frac{(1-|u|^2)^2}{4\varepsilon^2}\Big]\, dx,$$

pour laquelle on a

$$\frac{d}{dt} E_{\varepsilon,U}(u) = -\kappa_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_t u|^2 \, dx, \quad \forall t \geq 0.$$

Un résultat de [48] assure que si $U \in \mathcal{V}$ vérifie de plus $|\nabla U(x)| \leq C/\sqrt{|x|}$, les deux notions précédentes d'énergie coïncident :

$$E_{\varepsilon,U}(u) \equiv \mathcal{E}_{\varepsilon,U}(u) = \lim_{R\to+\infty} \int_{B(R)} \big[e_\varepsilon(u) - \frac{|\nabla U|^2}{2}\big]\, dx. \tag{6.2}$$

Pour $u \in \{U\} + C(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^2))$ avec $U \in [U_d]$, définissons finalement la quantité

$$E_{\varepsilon,[U_d]}(u) := \lim_{R\to+\infty} \int_{B(R)} \big[e_\varepsilon(u) - \frac{|\nabla U_d|^2}{2}\big].$$

Cette quantité est finie et vérifie d'après (6.2)

$$E_{\varepsilon,[U_d]}(u) = E_{\varepsilon,U}(u) + \int_{\mathbb{R}^2} \big[\frac{|\nabla U|^2}{2} - \frac{|\nabla U_d|^2}{2}\big]\, dx$$

et par conséquent

$$\frac{d}{dt} E_{\varepsilon,[U_d]}(u) = \frac{d}{dt} E_{\varepsilon,U}(u) = -\kappa_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_t u|^2. \tag{6.3}$$

On prend ici note du fait que le taux de dissipation de l'énergie renormalisée coïncide avec celui de l'énergie de Ginzburg-Landau lorsque celle-ci est finie.

6.1.2 Énoncé des résultats.

Dans la suite, A_n désignera l'anneau $B(2^{n+1}) \setminus B(2^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, de sorte que $\mathbb{R}^2 = B(2^{n_0}) \cup (\cup_{n\geq n_0} A_n)$.

Définition 6.1. *Soient $z_1, \dots, z_l$ des points distincts de $\mathbb{R}^2$, $d_i \in \{-1, +1\}$ pour $i = 1, \dots, l$ et soit $d = \sum d_i$. Soit $(u_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ une famille de fonctions appartenant à $[U_d] + H^1(\mathbb{R}^2)$. La famille $(u_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ est dite* très bien préparée *par rapport à la configuration (z_i, d_i) s'il existe $R = 2^{n_0} > \max |z_i|$ et une constante $K_0 > 0$ tels que*[33]

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|Ju_\varepsilon - \pi \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{z_i}\|_{W_0^{1,\infty}(B(R))^*} = 0, \tag{BP$_1$}$$

$$\sup_{0<\varepsilon<1} E_\varepsilon(u_\varepsilon, A_n) \le K_0 \qquad \forall n \ge n_0, \tag{BP$_2$}$$

et

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \big(E_{\varepsilon,[U_d]}(u_\varepsilon) - E_{\varepsilon,[U_d]}(u_\varepsilon^*(z_i, d_i))\big) \le 0. \tag{BP$_3$}$$

Notre résultat principal, dont la démonstration fera l'objet de toute la suite de ce chapitre, peut s'énoncer ainsi.

Théorème 6.1. *Soit $(u_\varepsilon^0)_{0<\varepsilon<1}$ appartenant $[U_d] + H^1(\mathbb{R}^2)$ une famille très bien préparée par rapport à la configuration (z_i^0, d_i) avec $d_i = \pm 1$, et soit $(u_\varepsilon(t))_{0<\varepsilon<1}$ la famille de solutions de* $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$ *correspondante dans $[U_d] + C(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^2))$. Soit $\{z_i(t)\}_{\{i=1,\dots,l\}}$ la solution du système d'équations différentielles ordinaires*

$$\begin{cases} \pi(1+\delta^2) d_i \dot{z}_i(t) = \big(\mathbb{J} - \delta d_i \mathbb{I}\big) \nabla_{z_i} W, \\ z_i(0) = z_i^0, \qquad i = 1, \dots, l, \end{cases} \tag{6.4}$$

où

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et W est la fonctionnelle de Kirchhoff-Onsager

$$W(z_i, d_i) = -\pi \sum_{i \neq j} d_i d_j \ln |z_i - z_j|.$$

Notons $[0, T^*)$ son intervalle maximal d'existence. Alors pour tout $t \in [0, T^*)$, la famille $(u_\varepsilon(t))_{0<\varepsilon<1}$ est très bien préparée par rapport à la configuration $(z_i(t), d_i)$.

6.2 Quelques définitions et résultats connus à propos de l'énergie et de la vorticité.

Dans un premier temps, nous rappelons ou obtenons un certain nombre de formules d'évolution impliquant des quantités reliées au flot u_ε.

---

[33] Ici, $E_\varepsilon(u, B) \equiv \int_B e_\varepsilon(u)$.

6.2.1 Notations préliminaires.

Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $x^\perp = (-x_2, x_1)$. Lorsque x et $y \in \mathbb{R}^2$, $x \cdot y$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$ et $x \times y := x^\perp \cdot y$ le produit extérieur de x et y. Lorsque $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, on note $x \cdot M = (x \cdot M_1, x \cdot M_2)^t$ et $x \times M = x^\perp \cdot M = (x^\perp \cdot M_1, x^\perp \cdot M_2)^t$, où M_k est la k-ième ligne de M.

Dans la suite, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ seront constamment identifiés. Pour x et $y \in \mathbb{C}$ nous poserons ainsi $x \cdot y = \mathrm{Re}(x\overline{y}) \in \mathbb{R}$ et $x \times y = -\mathrm{Im}(x\overline{y}) \in \mathbb{R}$, et enfin $x^\perp = ix \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.

Pour $u = u_1 + iu_2 \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, on notera $\mathrm{rot}\,(u) = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$ et

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \partial_1 u \\ \partial_2 u \end{pmatrix}.$$

Le *moment linéaire* associé à u est défini par

$$j(u) = u \times \nabla u = iu \cdot \nabla u = u^\perp \cdot \nabla u = \begin{pmatrix} u^\perp \cdot \partial_1 u \\ u^\perp \cdot \partial_2 u \end{pmatrix},$$

et le *jacobien* (ou *vorticité*) de u, par

$$J(u) = \frac{1}{2}\mathrm{rot} j(u) = \partial_1 u \times \partial_2 u = \det(\nabla u).$$

Lorsque u ne s'annule pas, on a pour $k = 1, 2$

$$\partial_k u = \partial_k u \cdot \frac{u}{|u|}\frac{u}{|u|} + \partial_k u \cdot \frac{u^\perp}{|u|}\frac{u^\perp}{|u|},$$

qui revient à

$$\partial_k u = \partial_k |u| \frac{u}{|u|} + \frac{j_k(u)}{|u|}\frac{u^\perp}{|u|}, \tag{6.5}$$

d'où

$$\partial_k u \cdot \partial_l u = \partial_k |u| \partial_l |u| + \frac{j_k(u) j_l(u)}{|u|^2} \tag{6.6}$$

et en particulier

$$|\nabla u|^2 = |\nabla |u||^2 + \frac{|j(u)|^2}{|u|^2}. \tag{6.7}$$

On définit, suivant [48], la différentielle de Hopf de u par

$$\omega(u) = |\partial_1 u|^2 - |\partial_2 u|^2 - 2i\partial_1 u \cdot \partial_2 u = 4\partial_z u \overline{\partial_{\overline{z}} u}.$$

À l'aide de la relation (6.6), on peut exprimer $\omega(u)$ en fonction des coordonnées de $\nabla|u|$ et $j(u)$ de la façon suivante :

$$\omega(u) = \partial_1 |u|^2 - \partial_2 |u|^2 - 2i\,\partial_1 |u| \partial_2 |u| + \frac{1}{|u|^2}\big(j_1^2(u) - j_2^2(u) - 2i\, j_1(u) j_2(u)\big). \tag{6.8}$$

Rappelons que la densité associée à l'énergie de Ginzburg-Landau est définie par

$$e_\varepsilon(u) = \frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{(1 - |u|^2)^2}{4\varepsilon^2} = \frac{|\nabla u|^2}{2} + V_\varepsilon(u),$$

qui d'après (6.7) vérifie

$$e_\varepsilon(u) = e_\varepsilon(|u|) + \frac{|j(u)|^2}{|u|^2}. \tag{6.9}$$

On définit également une densité d'énergie renormalisée

$$\mu_\varepsilon(u) = \frac{e_\varepsilon(u)}{|\ln\varepsilon|}.$$

Finalement, on récrit le membre de droite de $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$ comme

$$f = \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2}u(1-|u|^2).$$

6.2.2 La formule de Pohozaev.

La formule de Pohozaev, obtenue par intégration par parties, nous permettra au prochain paragraphe de calculer les termes d'interaction entre les vortex. Dans l'intégralité de ce paragraphe, on pourra consulter [49, 75] pour davantage de détails.

Proposition 6.1 (Pohozaev). *Soient $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction régulière et*

$$f = \Delta u + \frac{u}{\varepsilon^2}(1-|u|^2).$$

Alors pour tout champ de vecteurs $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ régulier à support compact, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} X\cdot(f\cdot\nabla u) = \int_{\mathbb{R}^2} V_\varepsilon(u)\mathrm{div}\,(X) + \sum_{i,j=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^2} T_{ij}(u)\partial_i X_j,$$

où la matrice $T(u)$ (appelée tenseur d'énergie-impulsion associé à u) est définie par

$$T(u) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} |\partial_2 u|^2 - |\partial_1 u|^2 & -2\partial_1 u\cdot\partial_2 u \\ -2\partial_1 u\cdot\partial_2 u & |\partial_1 u|^2 - |\partial_2 u|^2 \end{pmatrix},$$

et où

$$V_\varepsilon(u) = \frac{(1-|u|^2)^2}{4\varepsilon^2}.$$

Notons que d'après la forme particulière de $T(u)$, on a

$$\sum_{i,j=1}^{2} T_{ij}\partial_i X_j = T_{11}\left(\partial_1 X_1 - \partial_2 X_2\right) + T_{12}\left(\partial_1 X_2 + \partial_2 X_1\right) = -\mathrm{Re}\left(\omega(u)\partial_{\overline{z}} X\right),$$

où l'on a introduit les notations complexes $X(z) = X_1(z) + iX_2(z)$, de sorte que

$$2\partial_{\overline{z}} X = \partial_1 X_1 - \partial_2 X_2 + i\left(\partial_1 X_2 + \partial_2 X_1\right),$$

et où $\omega(u)$ est la différentielle de Hopf de u introduite au paragraphe précédent. Avec le formalisme complexe, la formule de Pohozaev se réduit donc à

$$\int_{\mathbb{R}^2} X\cdot(f\cdot\nabla u) = -\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{Re}\left(\omega(u)\partial_{\overline{z}} X\right) + \int_{\mathbb{R}^2} V_\varepsilon(u)\mathrm{div}\,(X).$$

En particulier, en choisissant $X = \nabla\varphi$, de sorte que $\partial_{\bar z} X = 2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial \bar z^2}$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla\varphi \cdot (f \cdot \nabla u)\, dx = -2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{Re}\left(\omega(u)\frac{\partial^2\varphi}{\partial \bar z^2}\right) dz + \int_{\mathbb{R}^2} V_\varepsilon(u)\Delta\varphi\, dx.$$

De même, on choisissant $X = \nabla^\perp\chi = i\nabla\chi$, de sorte que $\partial_{\bar z} X = 2i\dfrac{\partial^2\chi}{\partial \bar z^2}$, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla^\perp\chi \cdot (f \cdot \nabla u)\, dx = 2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{Im}\left(\omega(u)\frac{\partial^2\chi}{\partial \bar z^2}\right) dz. \tag{6.10}$$

6.3 Formules d'évolution pour l'énergie et la vorticité.

Puisque les points vortex sont décrits par les comportements asymptotiques de la densité d'énergie $e_\varepsilon(u_\varepsilon)$ et de la vorticité $J(u_\varepsilon)$, il est naturel d'étudier l'évolution de ces quantités pour chaque $\varepsilon > 0$.

Pour n'importe quelle application régulière $u = u(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, des calculs par intégrations par parties nous donnent pour l'énergie

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} e_\varepsilon(u)\varphi\, dx = -\int_{\mathbb{R}^2} \partial_t u{\cdot} f\varphi\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} \nabla\varphi \cdot (\partial_t u \cdot \nabla u)\, dx \tag{6.11}$$

et pour la vorticité

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} J(u)\chi\, dx = -\int_{\mathbb{R}^2} \nabla^\perp\chi \cdot (\partial_t u^\perp \cdot \nabla u)\, dx. \tag{6.12}$$

Ici, χ et φ sont des fonctions test ne dépendant que de la variable d'espace.

Dans un second temps, on suppose que $u = u_\varepsilon$ est la solution, régulière en vertu du Théorème 5.4, de $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$. On a alors

$$\partial_t u = \alpha_\varepsilon^{-1} f = \beta_\varepsilon f, \tag{6.13}$$

où $\alpha_\varepsilon = \delta|\ln\varepsilon|^{-1} + i = \kappa_\varepsilon + i$. En insérant (6.13) dans les relations (6.11) et (6.12) et en adoptant les notations complexes, on obtient ainsi

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} e_\varepsilon(u)\varphi\, dx = -\kappa_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_t u|^2\varphi\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} \nabla\varphi \cdot (\beta_\varepsilon f \cdot \nabla u)\, dx$$

et

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} J(u)\chi\, dx = -\int_{\mathbb{R}^2} i\nabla\chi \cdot (i\beta_\varepsilon f \cdot \nabla u)\, dx.$$

D'après l'identité de Pohozaev, on peut donc tirer parti de la formule d'évolution pour l'énergie dans le cas purement parabolique (pour laquelle $\beta_\varepsilon = 1$), et de la formule d'évolution pour la vorticité dans l'équation de Gross-Pitaevskii (pour laquelle $i\beta_\varepsilon = 1$). Pour l'équation intermédiaire $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$, le principe consiste à se débarasser des termes de la forme

$$\int_{\mathbb{R}^2} \vec{X} \cdot (if \cdot \nabla u)$$

en considérant une combinaison adéquate des deux formules d'évolution précédentes. Plus précisément, on écrit

$$\beta_\varepsilon = \frac{1}{\kappa_\varepsilon + i} = a + ib$$

et on calcule la quantité

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2}\big(bJ(u)\chi - ae_\varepsilon(u)\varphi\big) = (b^2+a^2)\int_{\mathbb{R}^2} i\nabla\chi\cdot(f\cdot\nabla u) + a\kappa_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_t u|^2$$
$$+\int_{\mathbb{R}^2}(\nabla\varphi - i\nabla\chi)\cdot(a(a+ib)f\cdot\nabla u).$$

Puisque $a = \kappa_\varepsilon/(\kappa_\varepsilon^2+1)$ et $b = -1/(\kappa_\varepsilon^2+1)$, la formule précédente combinée avec (6.10) nous conduit à la

Proposition 6.2. *Soit u une solution de* $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$. *Pour toutes $\varphi, \chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, on a*

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2}\big(J(u)\chi + \kappa_\varepsilon e_\varepsilon(u)\varphi\big) = -\kappa_\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_t u|^2\varphi - 2\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{Im}\left(\omega(u)\frac{\partial^2\chi}{\partial\bar z^2}\right) + R_\varepsilon(t,\varphi,\chi,u),$$

où le terme de reste R_ε est défini par

$$R_\varepsilon(t,\varphi,\chi,u) = -\kappa_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}(\nabla\varphi - \nabla^\perp\chi)\cdot(\beta_\varepsilon f\cdot\nabla u),$$

soit

$$R_\varepsilon(t,\varphi,\chi,u) = -\kappa_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}(\nabla\varphi - \nabla^\perp\chi)\cdot(\partial_t u\cdot\nabla u).$$

La Proposition 6.2 permet de déterminer formellement le système d'équations différentielles pour les points vortex. En effet, supposons que l'on ait

$$u_\varepsilon(t) \simeq u_\varepsilon^*(z_i(t), d_i),$$

de sorte que

$$Ju_\varepsilon(t) \rightharpoonup \pi\sum_{i=1}^{l} d_i\delta_{z_i(t)} \quad \text{et} \quad \mu_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) \rightharpoonup \pi\sum_{i=1}^{l}\delta_{z_i(t)}.$$

On applique alors la Proposition 6.2 en remplaçant u_ε par $u_\varepsilon^*(z_i(t), d_i)$ et en choisissant des fonctions test φ et χ localisées, affines et satisfaisant à $\nabla\varphi = \nabla^\perp\chi$ autour de chaque point $z_i(t)$. Nous verrons par la suite que sous les hypothèses précédentes pour $u_\varepsilon(t)$ et (χ,φ), on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\kappa_\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_t u_\varepsilon|^2\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} R_\varepsilon(t,\varphi,\chi,u_\varepsilon) = 0.$$

D'autre part, puisque χ est affine près des $z_i(t)$, la quantité $\omega(u_\varepsilon^*(z_i,d_i))\dfrac{\partial^2\chi}{\partial\bar z^2}$ est en réalité évaluée en dehors des vortex, c'est-à-dire là où

$$u_\varepsilon^*(z_i,d_i) \simeq u^*(z_i,d_i) = \prod_{i=1}^{l}\left(\frac{z-z_i}{|z-z_i|}\right)^{d_i}.$$

D'un autre côté, [48] (ou bien (7.2) dans [49]) met à notre disposition la formule explicite

$$2\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{Im}\left(\omega\big(u^*(z_i,d_i)\big)\frac{\partial^2\chi}{\partial\bar{z}^2}\right) = 2\pi\sum_{j\neq i} d_i d_j \frac{(z_i-z_j)^\perp}{|z_i-z_j|^2}\cdot\nabla\chi(z_i).$$

Par identification, on obtient pour chaque i

$$\pi d_i \dot{z}_i(t)\cdot\nabla\chi(z_i) + \delta\pi\dot{z}_i(t)\cdot\nabla\varphi(z_i) = -2\pi\sum_{j:j\neq i} d_i d_j \frac{(z_i-z_j)^\perp}{|z_i-z_j|^2}\cdot\nabla\chi(z_i).$$

Enfin, en tenant compte du fait que $\nabla\varphi(z_i) = \nabla^\perp\chi(z_i)$, on en déduit que

$$\pi\big(d_i\dot{z}_i(t) - \delta\dot{z}_i{}^\perp(t)\big)\cdot\nabla\chi(z_i) = -2\pi\sum_{j:j\neq i} d_i d_j \frac{(z_i-z_j)^\perp}{|z_i-z_j|^2}\cdot\nabla\chi(z_i),$$

ce qui correspond exactement au système (6.4), puisque $d_i = \pm 1$ pour tout i.

La suite de ce chapitre s'organise ainsi. La Section 6.4 rassemble des propriétés de l'énergie renormalisée établies dans [48] afin de traiter les difficultés propres au cadre du domaine infini. Aux Sections 6.5 et 6.6 suivantes est établie l'existence de points $\zeta_i(t)$ en lesquelles les densités d'énergie et les vorticités se concentrent à t positif. On montre ensuite que les quantités $\kappa_\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_t u|^2\varphi$ et $R_\varepsilon(t,\varphi,\chi,u_\varepsilon)$ sont effectivement évanescentes avec ε, ce qui permet d'établir que les $\zeta_i(t)$ sont des trajectoires lipschitziennes en temps. À ce stade, il reste à déterminer la dynamique des $\zeta_i(t)$. Les calculs formels précédents suggèrent d'estimer la quantité $\omega(u_\varepsilon)-\omega(u^*(z_i,d_i))$ en dehors des vortex. À la Section 6.7, cette quantité est contrôlée par l'excès d'énergie $E_{\varepsilon,[U_d]}(u_\varepsilon) - E_{\varepsilon,[U_d]}(u_\varepsilon^*(z_i))$. Ceci résulte de propriétés de coercivité de l'énergie en dehors des vortex, pour des normes spécifiques, vis-à-vis des superpositions de vortex u_ε^*. L'excès d'énergie lui-même se contrôle par la distance entre les trajectoires $\zeta_i(t)$ et $z_i(t)$. La preuve du Théorème 6.1 est alors achevée à l'aide d'un lemme de Gronwall pour cette distance.

6.4 Quelques résultats sur l'énergie renormalisée.

6.4.1 Énergie à l'infini et degré topologique à l'infini.

Dans ce paragraphe, on rassemble quelques propriétés de l'énergie à l'infini établies dans [48]. Ces propriétés requièrent la notion de degré topologique à l'infini.

Soit A l'anneau de référence $B(2)\setminus B(1)$. Pour $d\in\mathbb{Z}$, on définit l'ensemble

$$T_d = \{u\in H^1(A)\text{ t.q. }\exists B\subset B(u),\ |B|\geq\frac{3}{4},\ \forall r\in B,\ \deg(u,\partial B(r)) = d\},$$

où $B(u)$ est l'ensemble des rayons $r\in[1,2]$ tels que la restriction $u_{|\partial B(r)}$ soit continue et ne s'annule pas, et les ensembles de sous-niveau

$$E_\varepsilon^\Lambda = \{u\in H^1(A)\text{ t.q. }E_\varepsilon(u,A) < \Lambda\}.$$

Le secteur topologique de degré d est défini dans [42] par

$$S_{d,\varepsilon}^\Lambda = E_\varepsilon^\Lambda\cap T_d.$$

Théorème 6.2 ([42]). *Pour tout $\Lambda > 0$, il existe $\varepsilon_\Lambda > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_\Lambda$, on a*

$$E_\varepsilon^\Lambda = \bigcup_{d\in\mathbb{Z}} S_{d,\varepsilon}^\Lambda.$$

D'après [42], on sait également que pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_\Lambda$ et pour $d \neq d'$,

$$\inf\{ \sup_{s\in[0,1]} E_\varepsilon(p(s), A) : \ p \in C([0,1], H^1(A)),\ p(0) \in S_{d,\varepsilon}^\Lambda,\ p(1) \in S_{d',\varepsilon}^\Lambda\} \geq \sigma|\ln\varepsilon| \geq 2\Lambda, \tag{6.14}$$

où $\sigma > 0$ est une constante universelle. Le coût minimal d'énergie pour passer d'un degré à un autre est donc au moins d'ordre $|\ln\varepsilon|$.

Pour la suite de cette section, on fixe $\Lambda > \Lambda_d = 2\pi d^2 \ln 2$ et l'on pose

$$S_d \equiv S_{d,\varepsilon_\Lambda}^\Lambda.$$

L'application de référence U_d appartient donc à S_d puisque $|U_d| \equiv 1$ sur A et $\int_A |\nabla U_d|^2/2 = \pi d^2 \ln 2$.

On peut aisément déduire du Théorème 6.2 que si $u \in [U_d] + H^1(\mathbb{R})$, chaque $u(2^k\cdot)$ se trouve dans un secteur topologique $S_{d(k)}$ lorsque k est assez grand. En réalité, il existe un entier k au delà duquel $d(k) \equiv d$, ce qui signifie que u possède un degré à l'infini bien défini et égal à d.

Proposition 6.3 ([48], Corollaire 3.1 et Définition 2). *Soient $d \in \mathbb{Z}$, $\Lambda > \Lambda_d$ et $u \in [U_d] + H^1(\mathbb{R}^2)$. Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \geq n$, la fonction $u_k : z \in A \mapsto u(2^k z)$ appartient au secteur topologique S_d. Le plus petit entier pour lequel cette propriété a lieu est noté $n(u)$.*

Remarque 6.1. *Avec cette définition, l'entier $n(u)$ dépend de u et de Λ, mais ne dépend pas de ε.*

Démonstration. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $u_k : z \in A \mapsto u(2^k z)$. Par hypothèse, nous pouvons écrire $u = v + w$ avec $v \in [U_d]$ et $w \in H^1(\mathbb{R}^2)$. D'une part, d'après l'injection de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^2) \subset L^4(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} V_{\varepsilon_\Lambda}(u) \leq \frac{C}{\varepsilon_\Lambda^2}\left(\|1 - |v|^2\|_{L^2}^2 + \|w\|_{L^4}^4 + \|v\|_{L^\infty}^2\|w\|_{L^2}^2\right) \leq C(\varepsilon_\Lambda, u),$$

où nous rappelons que $V_\varepsilon(u) = (1 - |u|^2)^2/(4\varepsilon^2)$. Après changement de variable, l'estimation précédente se réduit à

$$\int_A V_{\varepsilon_\Lambda}(u_k) = 2^{-2k}\int_{A_k} V_{\varepsilon_\Lambda}(u) \leq 2^{-2k} C(\varepsilon_\Lambda, u),$$

où $C(\varepsilon_\Lambda, u)$ ne dépend pas de k, et où $A_k = B(2^{k+1}) \setminus B(2^k)$.

D'autre part, on obtient également par changement de variable

$$\int_A \frac{|\nabla u_k|^2}{2} = \int_{A_k} \frac{|\nabla u|^2}{2} \leq \int_{A_k} \left(|\nabla v|^2 + |\nabla w|^2\right),$$

et par ailleurs on a aussi

$$\int_{A_k} |\nabla v|^2 = \int_{A_k} \left(|\nabla v|^2 - |\nabla U_d|^2\right) + \int_{A_k} |\nabla U_d|^2 \leq \||\nabla v|^2 - |\nabla U_d|^2\|_{L^1(A_k)} + 2\pi d^2 \ln 2.$$

En combinant les estimations précédentes, on aboutit à

$$E_\varepsilon(u_k, A) \leq 2^{-2k} C(\varepsilon_\Lambda, u) + \||\nabla v|^2 - |\nabla U_d|^2\|_{L^1(A_k)} + \||\nabla w|^2\|_{L^1(A_k)} + 2\pi d^2 \ln 2 < \Lambda$$

dès lors que $k \geq k(\varepsilon_\Lambda, u)$ est choisi assez grand. Ceci montre que pour tout $k \geq k(\varepsilon_\Lambda, u)$, la fonction u_k appartient à $E^\Lambda_{\varepsilon_\Lambda}$ et par conséquent à un secteur topologique $S_{d(k)} = S^\Lambda_{d(k),\varepsilon_\Lambda}$ en vertu du Théorème 6.2. Il faut encore s'assurer que $d(k)$ est identiquement égal à d. Si ce n'est pas le cas, il existe un entier k pour lequel $d(k) = d' \neq d$. Posons $v_k = v(2^k\cdot)$, $w_k = w(2^k\cdot)$, où $u = v + w$, et

$$p : [0,1] \to H^1(A), \quad s \mapsto v_k + s w_k.$$

On a alors $p(1) = u_k \in S_{d'}$, et en utilisant le fait que $v \in [U_d]$ on vérifie rapidement que $p(0) = v_k \in S_d$ pour tout $k \geq k(\varepsilon_\Lambda, u)$. L'inégalité (6.14) nous donne alors $E_{\varepsilon_\Lambda}(p(s), A) \geq \sigma|\ln \varepsilon_\Lambda| \geq 2\Lambda$ pour un $s \in [0,1]$. Mais de même que précédemment, on obtient après remise à l'échelle $E_{\varepsilon_\Lambda}(p(s), A) \leq \Lambda_d + 2^{-2k} C(\varepsilon_\Lambda, u)$. Quitte à accroître $k(\varepsilon_\Lambda)$, on obtient donc $E_{\varepsilon_\Lambda}(p(s), A) < 2\Lambda$, ce qui nous mène à une contradiction. La conclusion s'ensuit. □

Lorsque l'énergie de $u \in [U_d] + H^1(\mathbb{R})$ satisfait de surcroît à des estimations uniformes à l'infini, ce qui est typiquement le cas des données vérifiant (BP_2), on peut obtenir une caractérisation plus précise de $n(u)$.

Lemme 6.1. *Soit* $\Lambda > \Lambda_d$ *fixé, et soit* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_\Lambda$. *Pour* $u \in [U_d] + H^1(\mathbb{R}^2)$, *supposons qu'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$E_\varepsilon(u, A_n) < \Lambda, \quad \forall n \geq n_0.$$

Alors $n(u) \leq n_0$.

Démonstration. Celle-ci est en fait une réplique de la preuve du Lemme 7.1 de [48]. Par l'absurde, supposons que l'on ait $n(u) > n_0$. En vertu du Théorème 6.2, la borne uniforme pour l'énergie assure que pour chaque $n \geq n_0$, $u_n = u(2^n\cdot)$ appartient à un secteur $S_{d(n)}$. On pose $n' = n(u) - 1 \geq n_0$. Alors $d(n') \neq d$ puisque $n' < n(u)$. Ensuite, on considère l'application continue

$$p : [0,1] \to H^1(A), \quad s \mapsto p(s) = u(2^{n'+s}\cdot),$$

qui vérifie $p(0) = u(2^{n'}\cdot) \in S_{d(n')}$ et $p(1) = u(2^{n(u)}\cdot) \in S_d$. On déduit de (6.14) qu'il existe un $s \in [0,1]$ tel que $E_\varepsilon(p(s), A) > 2\Lambda$. Après remise à l'échelle, on obtient

$$E_\varepsilon(u, A_{n'} \cup A_{n(u)}) > 2\Lambda,$$

ce qui contredit les hypothèses. □

D'après [48], la fonction de référence U_d est quasi-minimisante pour l'énergie de Ginzburg-Landau parmi les fonctions du secteur topologique S_d. Après remise à l'échelle cette propriété se traduit par la borne inférieure suivante.

Lemme 6.2 ([48])**.** *Soient* $d \in \mathbb{Z}$ *et* $u \in [U_d] + H^1(\mathbb{R}^2)$. *Pour tout entier* $k \geq n(u)$ *et pour* $0 < \varepsilon < \varepsilon_\Lambda$, *on a*

$$\int_{A_k} [e_\varepsilon(u) - \frac{|\nabla U_d|^2}{2}] \geq -C 2^{-2k} \varepsilon^2.$$

Il en découle le

Lemme 6.3 ([48]). *Soient $d \in \mathbb{Z}$, $u \in [U_d] + H^1(\mathbb{R}^2)$, $z_1, \dots, z_l \in \mathbb{R}^2$ et $d_1, \dots, d_l \in \mathbb{Z}^*$ tels que $d = \sum d_i$. Pour $k \geq 1 + \max\{\log_2 |z_1|, \dots, \log_2 |z_l|, n(u)\}$ et $R = 2^k$, on a*

$$\int_{B(R)} \left[e_\varepsilon(u) - e_\varepsilon(u_\varepsilon^*(z_i, d_i))\right] \leq E_{\varepsilon,[U_d]}(u) - E_{\varepsilon,[U_d]}(u_\varepsilon^*(z_i, d_i)) + \frac{C}{R},$$

où C ne dépend que de l et d.

L'estimation ci-dessus illustre l'intérêt de la définition de $n(u)$, autrement dit de l'hypothèse (BP_2), dans la définition de très bonne préparation des données. Elle nous permettra en effet de transposer à l'énergie renormalisée - à un terme correctif près - un certain nombre de propriétés de l'énergie de Ginzburg-Landau.

6.4.2 Formules explicites pour l'énergie de u_ε^*.

Ce paragraphe présente un aperçu de quelques identités classiques pour l'énergie de u_ε^* qui peuvent être trouvées dans [45], [48].

On considère désormais une configuration (z_i, d_i) avec $d_i \in \mathbb{Z}^*$, et on pose $d = \sum d_i$. En premier lieu, on dispose d'une expression explicite de l'énergie au voisinage de chaque vortex z_j.

Lemme 6.4. *Pour $j \in \{1, \dots, l\}$ et $0 < \varepsilon < 1$,*

$$\int_{B(z_j,r)} e_\varepsilon(u_\varepsilon^*(z_i, d_i)) = \pi d_j^2 \ln\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) + \gamma(|d_j|) + O(\frac{r}{r_a})^2 + O(\frac{\varepsilon}{r})^2,$$

où $\gamma(|d_j|)$ est une constante universelle.

En calculant par ailleurs l'énergie de $u_\varepsilon^*(z_i, d_i) \simeq u^*(z_i, d_i)$ sur $\Omega_{R,r} = B(R) \backslash \cup_{j=1}^l B(z_j, r)$ (voir par exemple [45]), puis en combinant les deux formules, on obtient la

Proposition 6.4. *Soient*

$$r_a = \frac{1}{8} \min_{i \neq j}\{|z_i - z_j|\}, \qquad R_a = \max\{|z_i|\}.$$

Pour $R > R_a + 1$, on a, lorsque ε tend vers zéro,

$$\int_{B(R)} e_\varepsilon(u_\varepsilon^*(z_i, d_i)) = \pi \sum_{i=1}^l d_i^2 |\ln \varepsilon| + W(z_i, d_i) + \sum_{i=1}^l \gamma(|d_i|) + \pi d^2 \ln R + O(\frac{R_a}{R}) + o_\varepsilon(1),$$

où $W(z_i, d_i)$ est la fonctionnelle de Kirchhoff-Onsager introduite au Théorème 6.1.

Puisque

$$\pi d^2 \ln R = \int_{B(R) \backslash B(1)} \frac{|\nabla U_d|^2}{2},$$

(6.2) procure finalement une formule explicite de l'énergie renormalisée des superpositions de vortex $u_\varepsilon^*(z_i, d_i)$.

Corollaire 6.1. *On a lorsque ε tend vers zéro*

$$E_{\varepsilon,[U_d]}(u^*_\varepsilon(z_i,d_i)) = \pi\sum_{i=1}^{l} d_i^2|\ln\varepsilon| + W(z_i,d_i) + \sum_{i=1}^{l}\gamma(|d_i|) - \int_{B(1)}\frac{|\nabla U_d|^2}{2} + o_\varepsilon(1).$$

Pour ce qui concerne l'énergie sur de grands anneaux, on cite finalement le

Lemme 6.5. *Pour $R > R_a$, on a*

$$\int_{B(2R)\setminus B(R)} e_\varepsilon(u^*_\varepsilon(z_i,d_i)) = \pi d^2\ln 2 + O(\frac{R_a}{R}),$$

soit

$$\int_{B(2R)\setminus B(R)} e_\varepsilon(u^*_\varepsilon(z_i,d_i)) = \int_{B(2R)\setminus B(R)}\frac{|\nabla U_d|^2}{2} + O(\frac{R_a}{R}).$$

6.5 Propriété de coercivité pour l'énergie renormalisée.

Cette section complète des résultats de [48] et [62] établissant pour $u\in[U_d]+H^1(\mathbb{R})$ des propriétés de coercivité de l'énergie par rapport aux configurations u^*_ε ; en résumé, lorsque u n'est pas trop éloigné d'une configuration de vortex u^*_ε, l'excès d'énergie de u par rapport à cette configuration contrôle l'écart de u à u^*_ε pour certaines normes. Ces résultats permettent en outre de localiser les vortex de u.

Dorénavant, on se focalise sur des vortex unitaires : $d_i = \pm 1$. Cette hypothèse est cruciale pour établir le Théorème 6.3 ci-dessous. Pour une configuration (z_i,d_i), on définit l'excès d'énergie de u par rapport à $u^*_\varepsilon(z_i,d_i)$ par

$$\Sigma_\varepsilon = \Sigma_\varepsilon(z_i,d_i) = E_{\varepsilon,[U_d]}(u) - E_{\varepsilon,[U_d]}(u^*_\varepsilon(z_i,d_i)).$$

On introduit enfin

$$r_a = \frac{1}{8}\min_{i\neq j}\{|z_i-z_j|\},\quad R_a = \max_{i=1,\dots,l}\{|z_i|\}.$$

Théorème 6.3. *Soient $r\le r_a$ et $2^{n_0}=R_0>R_a$ tels que $\cup_{i=1}^{l}B(z_i,r)\subset B(R_0)$. Il existe ε_0 et η_0 dépendant seulement de l, r, r_a, R_a, et R_0 satisfaisant à la propriété suivante : pour tout $u\in[U_d]+H^1(\mathbb{R})$ qui vérifie*

$$\eta = \|Ju - \pi\sum_{i=1}^{l} d_i\delta_{z_i}\|_{W_0^{1,\infty}(B(R_0))^*} \le \eta_0 \tag{6.15}$$

et

$$2^{n(u)} \le R_0, \tag{6.16}$$

on a pour tout $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$

$$\int_{B(R_0)\setminus\cup B(z_i,r)} e_\varepsilon(|u|) + \frac{1}{8}\Big|\frac{j(u)}{|u|} - j(u^*(z_i,d_i))\Big|^2 \le \Sigma_\varepsilon + C(\eta,\varepsilon,\frac{1}{R_0}), \tag{6.17}$$

où C est une fonction continue de plusieurs variables et nulle à l'origine. De plus, il existe des points $\zeta_i\in B(z_i,r/2)$ tels que

$$\|Ju - \pi\sum_{i=1}^{l} d_i\delta_{\zeta_i}\|_{W_0^{1,\infty}(B(R_0))^*} \le f(R_0,\Sigma_\varepsilon)\varepsilon|\ln\varepsilon| \tag{6.18}$$

et

$$\|\mu_\varepsilon(u) - \pi \sum_{i=1}^{l} \delta_{\zeta_i}\|_{W_0^{1,\infty}(B(R_0))^*} \leq \frac{g(R_0, r, r_a, \Sigma_\varepsilon)}{|\ln \varepsilon|}, \tag{6.19}$$

où f et g sont des fonctions continues de une ou plusieurs variables.

Démonstration. À l'exception de la propriété de concentration de l'énergie (6.19), chacun des énoncés est déjà présent dans le Théorème 6.1 de [48]. On se contente ici d'établir l'estimation (6.19). Lorsque l'excès d'énergie vérifie $\Sigma_\varepsilon \leq K_0$, cette estimation est déjà établie au Théorème 3.4.2 de [53] pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, où ε_0 dépend de l, r, r_a, R_a, R_0 et K_0. Dans le cas général, on adapte les arguments de [53] comme suit.

Tout d'abord, on déduit de (6.15) que

$$\|Ju - \pi d_i \delta_{z_i}\|_{W_0^{1,\infty}(B(z_i,r))^*} \leq \eta_0, \quad i = 1, \ldots, l.$$

Si η_0 est suffisamment petit par rapport à r, on obtient en vertu du Théorème 3 dans [62]

$$K_0^i \geq C(r),$$

où K_0^i est l'excès d'énergie au voisinage du vortex i défini par

$$K_0^i = \int_{B(z_i,r)} e_\varepsilon(u) - \pi \ln\left(\frac{r}{\varepsilon}\right).$$

Il s'ensuit que

$$\int_{B(z_i,r)} e_\varepsilon(u) \leq \int_{B(R_0)} e_\varepsilon(u) - \pi(l-1)|\ln \varepsilon| - C(r).$$

Dorénavant on note C toute constante dépendant uniquement de r, R_0, r_a et R_a. Puisque $n(u) \leq n_0$, le Lemme 6.3 et la Proposition 6.4 assurent que

$$\int_{B(R_0)} e_\varepsilon(u) \leq \int_{B(R_0)} e_\varepsilon(u_\varepsilon^*(z_i, d_i)) + \Sigma_\varepsilon + \frac{C}{R_0} \leq \pi l |\ln \varepsilon| + \Sigma_\varepsilon + C,$$

qui entraîne que

$$K_0^i \leq C + \Sigma_\varepsilon. \tag{6.20}$$

De plus, en remplaçant r par $3r/4$, on obtient également

$$\int_{B(R_0)\setminus \cup B(z_i, 3r/4)} \mu_\varepsilon(u) \leq \frac{C + \Sigma_\varepsilon}{|\ln \varepsilon|}. \tag{6.21}$$

Le Théorème 2' de [62] implique alors que la densité d'énergie $\mu_\varepsilon(u)$ dans $B(z_i, r)$ se concentre en un point $\zeta_i \in B(z_i, r/2)$ qui est précisément celui où la vorticité $J(u)$ se concentre. Plus précisément, l'estimation (4.2) de [62] assure que pour tous $\varepsilon \leq \sigma < \tau < r - |\zeta_i - z_i|$, on a

$$\int_{B(\zeta_i,\tau)\setminus B(\zeta_i,\sigma)} e_\varepsilon(u) \geq \pi \ln\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) - K_0^i - C.$$

On obtient ainsi pour tout $\varepsilon \leq \sigma \leq r/4$

$$\begin{aligned}
\int_{B(\zeta_i,2\sigma)\setminus B(\zeta_i,\sigma)} e_\varepsilon(u) &= \int_{B(\zeta_i,r/2)} e_\varepsilon(u) - \int_{B(\zeta_i,r/2)\setminus B(\zeta_i,2\sigma)} e_\varepsilon(u) - \int_{B(\zeta_i,\sigma)} e_\varepsilon(u) \\
&\leq \int_{B(z_i,r)} e_\varepsilon(u) - \int_{B(\zeta_i,r/2)\setminus B(\zeta_i,2\sigma)} e_\varepsilon(u) - \int_{B(\zeta_i,\sigma)\setminus B(\zeta_i,\varepsilon)} e_\varepsilon(u) \\
&\leq K_0^i + \pi \ln\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) - \pi \ln\left(\frac{r}{4\sigma}\right) + K_0^i - \pi \ln\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right) + K_0^i + C \\
&\leq 3K_0^i + C.
\end{aligned}$$

Il est classique (voir, par exemple, la démonstration de l'inégalité (3.2.4) du Théorème 3.2.1 de [53] pages 176-177) que l'estimation précédente implique que

$$\|\mu_\varepsilon(u) - \pi\delta_{\zeta_i}\|_{W_0^{1,\infty}(B(z_i,r))^*} \leq \frac{f(K_0^i, C)}{|\ln\varepsilon|},$$

où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

L'estimation ci-dessus, jointe à (6.20) et à l'inégalité (6.21) pour l'énergie en dehors des vortex, nous conduit finalement à (6.19). □

6.6 Convergence vers des trajectoires lipschitziennes.

Le but de cette section est d'établir l'existence de trajectoires lipschitziennes $\zeta_i(t)$ en lesquelles la vorticité $J(u_\varepsilon(t))$ et l'énergie $\mu_\varepsilon(u_\varepsilon(t))$ se concentrent. Comme nous le verrons, ceci est vrai pour des données initiales u_ε^0 plus générales[34] que celles considérées au Théorème 6.1. Plus précisément, on conserve les hypothèses (BP_1) et (BP_2), mais on remplace l'hypothèse (BP_3) par

$$\sup_{0<\varepsilon<1} \Big(E_{\varepsilon,[U_d]}(u_\varepsilon^0) - E_{\varepsilon,[U_d]}(u_\varepsilon^*(z_i^0, d_i)) \Big) \leq K_1. \tag{$\mathrm{BP}_{3'}$}$$

Théorème 6.4. *Soit* (z_i^0, d_i), $d_i = \pm 1$, *une configuration de vortex. Soient* $R = 2^{n_0}$ *et* $(u_\varepsilon^0)_{0<\varepsilon<1}$ *appartenant à* $[U_d] + H^1(\mathbb{R})$ *et vérifiant les hypothèses* (BP_1), (BP_2) *et* $(\mathrm{BP}_{3'})$.

Alors il existe $R' = 2^{n_1}$ *et* $T > 0$ *dépendant seulement de* K_1, R, r_{a^0} *et* R_{a^0}, *une sous-suite* ε_k *tendant vers zéro et* l *trajectoires lipschitziennes* $\zeta_i : [0,T] \to \mathbb{R}$ *partant de* z_i^0, *tels que*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|Ju_{\varepsilon_k}(t) - \pi\sum_{i=1}^{l} d_i\delta_{\zeta_i(t)}\|_{W_0^{1,\infty}(B(R'))^*} \to 0, \qquad k \to +\infty \tag{6.22}$$

et

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\mu_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}(t)) - \pi\sum_{i=1}^{l} \delta_{\zeta_i(t)}\|_{W^{1,\infty}(B(R'))^*} \to 0, \qquad k \to +\infty. \tag{6.23}$$

De plus, il existe une constante $C_0 > 0$ *dépendant seulement de* r_{a^0}, R, K_1 *et* K_0, *et une constante* $C_1 > 0$ *dépendant seulement de* r_{a^0}, R *et* K_1, *telles que pour tous* $t \in [0,T]$ *et* $k \in \mathbb{N}$,

$$E_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}(t), A_n) \leq C_0, \qquad \forall n \geq n_1 \tag{6.24}$$

et

$$E_{\varepsilon_k,[U_d]}\left(u_{\varepsilon_k}(t)\right) - E_{\varepsilon_k,[U_d]}\left(u_{\varepsilon_k}^*(\zeta_i(t), d_i)\right) \leq C_1. \tag{6.25}$$

Démonstration. Dans ce qui suit, C désignera une constante ne dépendant que de r_{a^0}, R, R_{a^0} et K_1. Afin d'alléger les notations, nous noterons $r_a = r_{a^0}$ et $R_a = R_{a^0}$.

Fixons pour commencer $\Lambda > \max(K_0, \Lambda_d)$. D'après le Lemme 6.1 et l'hypothèse (BP_2), il existe $\varepsilon_\Lambda > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_\Lambda$ on ait $n(u_\varepsilon^0) \leq n_0$. On suppose désormais que ε vérifie $0 < \varepsilon < \varepsilon_\Lambda$.

[34] On les dit *bien préparées*.

Ensuite, on introduit le plus petit entier $n_1 \geq n_0$ pour lequel $2^{n_1} \geq \max(R, R_a + r_a)$, et on définit $R' = 2^{n_1}$. On écrit dorénavant $\|\cdot\|$ au lieu de $\|\cdot\|_{W_0^{1,\infty}(B(R'))^*}$.

Notre objectif est d'appliquer le Théorème 6.3 à chaque $u_\varepsilon(t)$ avec $r = r_a$ et $R_0 = R'$. Soient η_0 et ε_0 les constantes fournies par ce théorème pour ce choix de r et R_0.

Temps de contrôle. On prétend que pour chaque $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe $T_\varepsilon > 0$ tel que

$$\|Ju_\varepsilon(s) - \pi \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{z_i^0}\| < \eta_0 \quad \text{et} \quad n(u_\varepsilon(s)) \leq n_1, \quad \forall s \in [0, T_\varepsilon).$$

En effet, les hypothèses (BP_2) et ($\mathrm{BP}_{3'}$) impliquent d'une part que la convergence de (BP_1) est encore vérifiée dans $B(R')$ (voir la preuve du Lemme 7.3 de [48]). Ainsi, par continuité de $t \mapsto Ju_\varepsilon(t) \in L^1(B(R'))$ pour chaque ε, il existe $T_\varepsilon > 0$ tel que

$$\|Ju_\varepsilon(s) - \pi \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{z_i^0}\| < \eta_0, \qquad \forall s \in [0, T_\varepsilon).$$

On prend $T_\varepsilon \leq T^*$ maximal pour cette propriété, où T^* est le temps introduit au Théorème 6.1.

D'autre part, puisque $t \mapsto E_\varepsilon(u_\varepsilon(t), A_n)$ est uniformément équicontinue par rapport à n et puisque $\Lambda > K_0$, l'hypothèse (BP_2) implique l'existence de $T'_\varepsilon > 0$ tel que

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon(s), A_n) < \Lambda, \quad \forall n \geq n_1, \quad \forall s \in [0, T'_\varepsilon].$$

Par conséquent $n(u_\varepsilon(s)) \leq n_1$ pour $s \in [0, T'_\varepsilon]$ d'après le Lemme 6.1. On prend $T'_\varepsilon \leq T^*$ maximal pour cette propriété.

On prétend qu'il existe une constante D ne dépendant que de K_1, r_a, R et K_0 telle que

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon(s), A_n) \leq D, \qquad \forall n \geq n_1, \quad \forall s \in [0, \min(T_\varepsilon, T'_\varepsilon)). \tag{6.26}$$

Supposons pour l'instant que (6.26) ait bien lieu et que Λ ait été choisi au préalable de sorte que

$$\Lambda > \max(K_0, \Lambda_d, D).$$

On a alors $T'_\varepsilon \geq T_\varepsilon$, ce qui assure que $n(u_\varepsilon(s)) \leq n_1$ sur tout l'intervalle $[0, T_\varepsilon]$.

Démonstration de (6.26). De même que dans [48], on écrit pour chaque $n \geq n_1$

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon(s), A_n) - E_\varepsilon(u^*_\varepsilon(z_i^0, d_i), A_n) = \sum_{\substack{k=n_1 \\ k \neq n}}^{+\infty} \big(E_\varepsilon(u^*_\varepsilon(z_i^0, d_i), A_k) - E_\varepsilon(u_\varepsilon(s), A_k)\big)$$

$$+ E_\varepsilon\left(u^*_\varepsilon(z_i^0, d_i), B(R')\right) - E_\varepsilon\left(u_\varepsilon(s), B(R')\right) + E_{\varepsilon,[U_d]}\left(u_\varepsilon(s)\right) - E_{\varepsilon,[U_d]}\left(u^*_\varepsilon(z_i^0, d_i)\right).$$

On commence par évaluer chaque terme intervenant dans la somme. En vertu des Lemmes 6.2 et 6.5, on a pour $k \geq n_1$

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(u_\varepsilon(s), A_k) &\geq -C\varepsilon^2 2^{-2k} + \int_{A_k} \frac{|\nabla U_d|^2}{2} \\ &\geq E_\varepsilon(u^*_\varepsilon(z_i^0, d_i), A_k) - C(R_a)2^{-k} - C\varepsilon^2 2^{-2k}, \end{aligned}$$

et on en déduit que

$$\sum_{\substack{k=n_1\\k\neq n}}^{+\infty}\big(E_\varepsilon(u_\varepsilon^*(z_i^0,d_i),A_k)-E_\varepsilon(u_\varepsilon(t),A_k)\big)\le C.$$

Ensuite, par définition de T_ε et d'après le Théorème 3 de [62], on obtient

$$\int_{B(z_i^0,r_a)} e_\varepsilon(u_\varepsilon(s))\ge \pi|\ln\varepsilon|-C.$$

Puisque R' a été précisément choisi de sorte que $\cup_{i=1}^l B(z_i^0,r_a)\subset B(R')$, on trouve

$$E_\varepsilon\left(u_\varepsilon(s),B(R')\right)\ge \pi l|\ln\varepsilon|-C.$$

En appliquant la Proposition 6.4 on obtient donc

$$E_\varepsilon\left(u_\varepsilon^*(z_i^0,d_i),B(R')\right)-E_\varepsilon\left(u_\varepsilon(s),B(R')\right)\le C. \tag{6.27}$$

Finalement, définissons

$$\Sigma_\varepsilon^0(s):=E_{\varepsilon,[U_d]}\left(u_\varepsilon(s)\right)-E_{\varepsilon,[U_d]}\left(u_\varepsilon^*(z_i^0,d_i)\right).$$

Comme $t\mapsto E_{\varepsilon,[U_d]}\left(u_\varepsilon(t)\right)$ est décroissante, l'hypothèse ($\mathrm{BP}_{3'}$) nous donne

$$\Sigma_\varepsilon^0(s)\le E_{\varepsilon,[U_d]}(u_\varepsilon^0)-E_{\varepsilon,[U_d]}\left(u_\varepsilon^*(z_i^0,d_i)\right)\le K_1$$

et nous obtenons (6.26). □

Définition des points vortex. On peut à présent appliquer le Théorème 6.3 à chaque $u_\varepsilon(t)$ sur $[0,T_\varepsilon]$. Notons $\zeta_i^\varepsilon(t)\in B(z_i^0,r_a/2)$ les points ainsi trouvés. Puisque $\Sigma_\varepsilon^0(t)\le K_1$, (6.17) se réduit à

$$\int_{\Omega_{R',r_a}} e_\varepsilon(|u_\varepsilon(t)|)+\frac{1}{8}\left|\frac{j(u_\varepsilon(t))}{|u_\varepsilon(t)|}-j(u^*(z_i^0,d_i))\right|^2\le C,$$

où $\Omega_{R',r_a}=B(R')\setminus\cup_{i=1}^l B(z_i^0,r_a)$. De plus, (6.8) and (6.9) nous donnent

$$\int_{\Omega_{R',r_a}} e_\varepsilon(u_\varepsilon(s))\le C \tag{6.28}$$

et

$$\|\omega(u_\varepsilon(s))\|_{L^1(\Omega_{R',r_a})}\le C, \tag{6.29}$$

où $C=C(R,r_a,K_1)$. Afin de simplifier les notations, on écrit désormais μ_ε au lieu de $\mu_\varepsilon(u_\varepsilon)$.

Bonnes paires de fonctions test. Si (z_i,d_i) est une configuration quelconque de vortex, on définit l'ensemble $\mathcal{H}(z_i)$ des paires de fonctions test $(\chi,\varphi)\in C_c^\infty(\mathbb{R})^2$ vérifiant

$$\chi=\sum_{i=1}^l\chi_i \quad \text{et} \quad \varphi=\sum_{i=1}^l\varphi_i,$$

où pour tout i

$$\chi_i, \varphi_i \in C_c^\infty\Big(B(z_i, \frac{3r_a}{2})\Big) \quad \text{et} \quad \nabla\varphi_i = \nabla^\perp \chi_i \quad \text{dans} \quad B(z_i, r_a).$$

On impose en outre que χ_i - par conséquent φ_i également - soit affine dans $B(z_i, r_a)$ avec $|\nabla\chi_i(z_i)| = |\nabla\varphi_i(z_i)| \leq 1$.

Par définition de r_a, il est clair qu'il existe toujours de telles fonctions et que de plus leurs normes vérifient

$$\|D\varphi\|_\infty, \|D\chi\|_\infty \leq \frac{C}{r_a} \quad \text{et} \quad \|D^2\varphi\|_\infty, \|D^2\chi\|_\infty \leq \frac{C}{r_a^2}.$$

Lemme 6.6. *Il existe une constante $C = C(r_a, R, K_1, T^*)$ telle que*

$$\int_0^{T_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\partial_t u_\varepsilon|^2}{|\ln\varepsilon|^2}\, ds \leq \frac{C}{|\ln\varepsilon|}$$

et pour $(\chi, \varphi) \in \mathcal{H}(z_i^0)$

$$\left|\int_0^{T_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla^\perp\chi - \nabla\varphi) \cdot \frac{\partial_t u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon}{|\ln\varepsilon|}\, ds\right| \leq \frac{C}{|\ln\varepsilon|^{\frac{1}{2}}}.$$

Démonstration. Pour la première inégalité du lemme, on invoque l'inégalité (6.3) pour obtenir

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{|\ln\varepsilon|} \int_0^{T_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_t u_\varepsilon|^2 =& E_{\varepsilon,[U_d]}\left(u_\varepsilon^0\right) - E_{\varepsilon,[U_d]}\left(u_\varepsilon(T_\varepsilon)\right) \\ \leq& K_1 + E_{\varepsilon,[U_d]}\left(u_\varepsilon^*(z_i^0, d_i)\right) - E_{\varepsilon,[U_d]}\left(u_\varepsilon(T_\varepsilon)\right).\end{aligned}$$

Ensuite, puisque $n(u_\varepsilon(T_\varepsilon)) \leq n_1$, le Lemme 6.3 nous donne

$$E_{\varepsilon,[U_d]}\left(u_\varepsilon^*(z_i^0, d_i)\right) - E_{\varepsilon,[U_d]}\left(u_\varepsilon(T_\varepsilon)\right) \leq \int_{B(R')} \left[e_\varepsilon\left(u_\varepsilon^*(z_i^0, d_i)\right) - e_\varepsilon\left(u_\varepsilon(T_\varepsilon)\right)\right] + \frac{C}{R'}.$$

Ce dernier terme est borné d'après (6.27). Il suffit alors de diviser l'inégalité par $|\ln\varepsilon|$.

Pour établir la seconde inégalité, on introduit la fonction $\xi = \nabla^\perp\chi - \nabla\varphi$ dont le support est inclus dans $A = \cup_{i=1}^l A_i$, où $A_i = B(z_i^0, 3r_a/2) \setminus B(z_i^0, r_a)$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\left(\int_0^{T_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla^\perp\chi - \nabla\varphi) \cdot \frac{\partial_t u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon}{|\ln\varepsilon|}\right)^2 \leq \left(\int_0^{T_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\partial_t u_\varepsilon|^2}{|\ln\varepsilon|^2}\right) \cdot \left(\int_0^{T_\varepsilon} \int_A |\nabla u_\varepsilon|^2 |\xi|^2\right).$$

Mais puisque $A \subset \Omega_{R', r_a}$ et $\sup\limits_{0<\varepsilon<1} T_\varepsilon \leq T^*$, on déduit de (6.28) que

$$\int_0^{T_\varepsilon} \int_A |\nabla u_\varepsilon|^2 |\xi|^2 \leq \|\xi\|_\infty^2 \int_0^{T_\varepsilon} \int_A |\nabla u_\varepsilon|^2 \leq CT^* \|\xi\|_\infty^2,$$

et la conclusion du lemme est finalement une conséquence de la première partie de la preuve. □

À l'aide des résultats précédents, nous pouvons à présent établir une borne inférieure pour T_ε.

Lemme 6.7. *Il existe* $T = T(r_a, R_a, R, K_1) > 0$ *tel que*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon \geq T.$$

Démonstration. On procède en deux étapes.
Première étape. Soit $(\chi,\varphi) \in \mathcal{H}(z_i^0)$. On a pour $s,t \in [0,T_\varepsilon]$ et $i = 1,\dots,l$

$$\left|\langle \chi_i, Ju_\varepsilon(t) - Ju_\varepsilon(s)\rangle + \delta\langle \varphi_i, \mu_\varepsilon(t) - \mu_\varepsilon(s)\rangle\right| \leq C|t-s| + \frac{C}{|\ln\varepsilon|^{\frac{1}{2}}}. \tag{6.30}$$

En effet, pour i fixé, on applique la Proposition 6.2 à $u \equiv u_\varepsilon$ pour le choix de fonctions test (χ_i,φ_i) et on obtient après intégration sur $[s,t]$

$$\begin{aligned} |\langle \chi_i, Ju_\varepsilon(t) - Ju_\varepsilon(s)\rangle + \delta\langle \varphi_i, \mu_\varepsilon(t) - \mu_\varepsilon(s)\rangle| &\leq 2\int_s^t \int \left|\mathrm{Im}\left(\omega(u_\varepsilon)\frac{\partial^2\chi_i}{\partial\bar{z}^2}\right)\right| \\ + C\int_s^t \int &\left|\frac{|\partial_t u_\varepsilon|^2}{|\ln\varepsilon|^2}\varphi_i + (\nabla^\perp\chi_i - \nabla\varphi_i)\cdot\frac{\partial_t u_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon}{|\ln\varepsilon|}\right|. \end{aligned}$$

Puisque le support de $\dfrac{\partial^2\chi_i}{\partial\bar{z}^2}$ est inclus dans $A_i \subset \Omega_{R',r_a}$, la conclusion résulte de (6.29) et du Lemme 6.6.

Deuxième étape. Dans l'optique d'utiliser l'égalité

$$\|Ju_\varepsilon(T_\varepsilon) - \pi\sum_{i=1}^{l} d_i\delta_{z_i^0}\| \equiv \eta_0,$$

on définit les vecteurs unitaires

$$\nu_{i,\varepsilon} = d_i\frac{\zeta_i^\varepsilon(T_\varepsilon) - z_i^0}{|\zeta_i^\varepsilon(T_\varepsilon) - z_i^0|}, \qquad i = 1,\dots,l,$$

et des fonctions test $\chi_{i,\varepsilon}$, $\varphi_{i,\varepsilon}$ vérifiant pour $x \in B(z_i^0, r_a)$

$$\chi_{i,\varepsilon}(x) = \nu_{i,\varepsilon}\cdot x, \qquad \varphi_{i,\varepsilon}(x) = \nu_{i,\varepsilon}^\perp\cdot x,$$

et telles que de plus $(\chi,\varphi) \in \mathcal{H}(z_i^0)$, où $\chi = \sum\chi_{i,\varepsilon}$ et $\varphi = \sum\varphi_{i,\varepsilon}$. En outre, $\varphi_{i,\varepsilon}$ et $\chi_{i,\varepsilon}$ peuvent être choisies de sorte que leur norme dans $C^2(B(R))$ soit bornée uniformément par rapport à ε.

Puisque $\zeta_i^\varepsilon(T_\varepsilon) \in B(z_i^0, r_a/2)$, nous avons par choix de χ et φ

$$|d_i||\zeta_i^\varepsilon(T_\varepsilon) - z_i^0| = d_i\chi(\zeta_i^\varepsilon(T_\varepsilon) - z_i^0) + \delta\varphi(\zeta_i^\varepsilon(T_\varepsilon) - z_i^0).$$

D'autre part, un résultat de Brezis, Coron et Lieb [47] assure que la norme $\|\cdot\|$ entre deux sommes de masses de Dirac positives est réalisée comme longueur de connexion minimale entre les points. En d'autres termes, pour des points $(p_1,\dots,p_l)$ et $(n_1,\dots,n_l)$ de $B(R')^l$ on a

$$\|\sum_{i=1}^{l}\delta_{p_i} - \delta_{n_i}\| = \min_{\sigma\in\mathcal{S}_l}\sum_{i=1}^{l}|p_i - n_{\sigma_i}|,$$

où $\mathcal{S}_l$ désigne l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,l\}$. Puisque dans notre cas $d_i = \pm 1$ et puisque $|\zeta_i(T_\varepsilon) - z_i^0| \le r_a/2$, le minimum est atteint pour $\sigma = \mathrm{id}$, donc

$$\|\pi \sum_{i=1}^{l} d_i(\delta_{\zeta_i^\varepsilon(T_\varepsilon)} - \delta_{z_i^0})\| = \pi \sum_{i=1}^{l} |\zeta_i^\varepsilon(T_\varepsilon) - z_i^0|.$$

On en déduit que

$$\|\pi \sum_{i=1}^{l} d_i(\delta_{\zeta_i^\varepsilon(T_\varepsilon)} - \delta_{z_i^0})\| = \big\langle \pi \sum_{i=1}^{l} d_i(\delta_{\zeta_i^\varepsilon(T_\varepsilon)} - \delta_{z_i^0}), \chi \big\rangle + \delta \big\langle \pi \sum_{i=1}^{l} (\delta_{\zeta_i^\varepsilon(T_\varepsilon)} - \delta_{z_i^0}), \varphi \big\rangle.$$

D'autre part, nous avons

$$\|Ju_\varepsilon(T_\varepsilon) - \pi \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{z_i^0}\| \le \|Ju_\varepsilon(T_\varepsilon) - \pi \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{\zeta_i^\varepsilon(T_\varepsilon)}\| + \|\pi \sum_{i=1}^{l} d_i(\delta_{\zeta_i^\varepsilon(T_\varepsilon)} - \delta_{z_i^0})\|.$$

Le second terme du membre de droite s'écrit

$$\big\langle \pi \sum_{i=1}^{l} d_i(\delta_{\zeta_i^\varepsilon(T_\varepsilon)} - \delta_{z_i^0}), \chi \big\rangle + \delta \big\langle \pi \sum_{i=1}^{l} (\delta_{\zeta_i^\varepsilon(T_\varepsilon)} - \delta_{z_i^0}), \varphi \big\rangle = A + B + C,$$

où

$$\begin{aligned} A &= \big\langle \pi \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{\zeta_i^\varepsilon(T_\varepsilon)} - Ju_\varepsilon(T_\varepsilon), \chi \big\rangle + \delta \big\langle \pi \sum_{i=1}^{l} \delta_{\zeta_i^\varepsilon(T_\varepsilon)} - \mu_\varepsilon(T_\varepsilon), \varphi \big\rangle \\ &\le C\big(\|Ju_\varepsilon(T_\varepsilon) - \pi \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{\zeta_i^\varepsilon(T_\varepsilon)}\| + \delta \|\mu_\varepsilon(T_\varepsilon) - \pi \sum_{i=1}^{l} \delta_{\zeta_i^\varepsilon(T_\varepsilon)}\|\big), \end{aligned}$$

B est défini par

$$B = \langle Ju_\varepsilon(T_\varepsilon) - Ju_\varepsilon(0), \chi \rangle + \delta \langle \mu_\varepsilon(T_\varepsilon) - \mu_\varepsilon(0), \varphi \rangle$$

et enfin

$$\begin{aligned} C &= \big\langle Ju_\varepsilon^0 - \pi \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{z_i^0}, \chi \big\rangle + \delta \big\langle \mu_\varepsilon(u_\varepsilon^0) - \pi \sum_{i=1}^{l} \delta_{z_i^0}, \varphi \big\rangle \\ &\le C\big(\|Ju_\varepsilon^0 - \pi \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{z_i^0}\| + \delta \|\mu_\varepsilon(u_\varepsilon^0) - \pi \sum_{i=1}^{l} \delta_{z_i^0}\|\big). \end{aligned}$$

Au vu de la borne (6.30) fournie par la première étape pour B, des estimations (6.18)-(6.19) et du fait que $\Sigma_\varepsilon^0(s) \le K_1$ pour $0 \le s \le T_\varepsilon$, on est mené à

$$\eta_0 = \|Ju_\varepsilon(T_\varepsilon) - \pi \sum_{i=1}^{l} d_i \delta_{z_i^0}\| \le C(\varepsilon |\ln \varepsilon| + |\ln \varepsilon|^{-1} + |\ln \varepsilon|^{-\frac{1}{2}}) + CT_\varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers zéro on parvient finalement à la conclusion. $\square$

À ce stade, nous pouvons exposer la

Fin de la démonstration du Théorème 6.4.
Soient $t, s \in [0, T]$. En imitant la preuve du Lemme 6.7 (en remplaçant T_ε et 0 par t et s), on obtient pour toute paire $(\chi, \varphi) \in \mathcal{H}(z_i^0)$,

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i=1}^{l} d_i\big[\chi(\zeta_i^\varepsilon(t)) - \chi(\zeta_i^\varepsilon(s))\big] + \delta\big[\varphi(\zeta_i^\varepsilon(t)) - \varphi(\zeta_i^\varepsilon(s))\big]\Big| \\
&\qquad \le C \sup_{\tau\in[0,T]} \Big(\|Ju_\varepsilon(\tau) - \pi\sum_{i=1}^{l} d_i\delta_{\zeta_i^\varepsilon(\tau)}\| + \delta\|\mu_\varepsilon(\tau) - \pi\sum_{i=1}^{l}\delta_{\zeta_i^\varepsilon(\tau)}\|\Big) \\
&\qquad + \big|\langle Ju_\varepsilon(t) - Ju_\varepsilon(s), \chi\rangle + \delta\langle \mu_\varepsilon(t) - \mu_\varepsilon(s), \varphi\rangle\big| \\
&\qquad \le C|t-s| + o_\varepsilon(1),
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte de (6.18)-(6.19) et de (6.30). Ainsi, en considérant successivement $\chi(x) = e_1 \cdot x$ et $\chi(x) = e_2 \cdot x$ sur chaque $B(z_i^0, r_a)$, on trouve

$$|\zeta_i^\varepsilon(t) - \zeta_i^\varepsilon(s)| \le C|t-s| + o_\varepsilon(1). \tag{6.31}$$

Ensuite, puisque $\zeta_i^\varepsilon \in B(z_i^0, r_a)$, un argument classique d'extraction diagonale permet de construire une sous-suite ε_k tendant vers zéro ainsi que des points $\zeta_i(t)$ tels que les $\zeta_i^{\varepsilon_k}(t)$ convergent vers les $\zeta_i(t)$ pour tout $t \in \mathbb{Q} \cap [0, T]$. On déduit alors des estimations (6.18)-(6.19) que les convergences (6.22)-(6.23) énoncées au Théorème 6.4 ont lieu pour les temps $t \in \mathbb{Q} \cap [0, T]$. D'après (6.31), les fonctions $\zeta_i(t)$ sont lipschitziennes sur $[0, T] \cap \mathbb{Q}$, elles peuvent donc être prolongées de manière unique en des fonctions définies sur $[0, T]$; on les renote $\zeta_i(t)$.

Finalement, on conclut que les convergences (6.22)-(6.23) ont lieu uniformément en temps sur $[0, T]$ en utilisant à nouveau (6.31) et (6.18)-(6.19).

Enfin, la borne (6.26) pour l'énergie à l'infini assure que (6.24) a lieu pour toute la famille $(u_\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_\Lambda}$. Afin d'établir que l'hypothèse $(\mathrm{BP}_{3'})$ reste vraie à temps positifs, on rappelle en premier lieu que

$$E_{\varepsilon,[U_d]}\left(u_\varepsilon(t)\right) - E_{\varepsilon,[U_d]}\left(u_\varepsilon^*(z_i^0, d_i)\right) \le K_1.$$

Par ailleurs, on a d'après le Corollaire 6.1

$$E_{\varepsilon,[U_d]}\left(u_\varepsilon^*(z_i^0, d_i)\right) - E_{\varepsilon,[U_d]}\left(u_\varepsilon^*(\zeta_i(t), d_i)\right) = W(z_i^0, d_i) - W(\zeta_i(t), d_i) \le C,$$

où l'inégalité résulte du fait que les ζ_i sont continues et restent à distance strictement positive sur $[0, T]$. On en déduit (6.25) et la preuve du Théorème 6.4 est achevée. □

Comme on l'a mentionné au début de la démonstration du Théorème 6.4, les hypothèses (BP_2) et $(\mathrm{BP}_{3'})$ entraînent que la convergence des jacobiens (BP_1) a lieu dans tous les $B(L), L = 2^n \ge R$. En remplaçant R par L dans la démonstration précédente, on obtient l'extension suivante

Lemme 6.8 ([48], Lemme 7.3)**.** *Il existe une sous-suite, renotée ε_k, telle que pour tout $L \ge 2^{n_1}$*

$$\eta_k := \sup_{[0,T]} \|Ju_{\varepsilon_k}(t) - \pi\sum_{i=1}^{l} d_i\delta_{\zeta_i(t)}\|_{W_0^{1,\infty}(B(L))^*} \to 0, \qquad k \to +\infty.$$

On est ainsi amené à introduire l'excès d'énergie $\Sigma_{\varepsilon_k}(t)$ de $u_{\varepsilon_k}(t)$ vis à vis de la configuration $(\zeta_i(t), d_i)$

$$\Sigma_{\varepsilon_k}(t) = E_{\varepsilon_k,[U_d]}\left(u_{\varepsilon_k}(t)\right) - E_{\varepsilon_k,[U_d]}\left(u^*_{\varepsilon_k}(\zeta_i(t), d_i)\right),$$

qui est uniformément bornée sur $[0,T]$ au vu de (6.25).

Lemme 6.9. *Pour tous $r \le r_a/2$ et $K \ge 2^{n_1}$, on a pour tout entier k assez grand, et pour $t, t_1, t_2 \in [0,T]$,*

$$\int_{B(K)\setminus \cup B(\zeta_i(t),r)} e_{\varepsilon_k}(|u_{\varepsilon_k}(t)|) + \frac{1}{8}\Big|\frac{j(u_{\varepsilon_k}(t))}{|u_{\varepsilon_k}(t)|} - j(u^*(\zeta_i(t),d_i))\Big|^2 \le \Sigma_{\varepsilon_k}(t) + C(\varepsilon_k, \eta_k, \frac{1}{K}).$$

En outre,

$$\limsup_{k\to+\infty} \int_{t_1}^{t_2}\int_{B(K)\setminus \cup B(\zeta_i(t),r)} e_{\varepsilon_k}(|u_{\varepsilon_k}|) + \frac{1}{8}\Big|\frac{j(u_{\varepsilon_k})}{|u_{\varepsilon_k}|} - j(u^*(\zeta_i,d_i))\Big|^2 \le \limsup_{k\to+\infty}\int_{t_1}^{t_2}\Sigma_{\varepsilon_k}.$$

Démonstration. Soit $n \ge n_1$ tel que $K \le 2^n$. Soit $t \in [0,T]$. D'après le Lemme 6.8, pour tout $k \ge k(r,n,r_a,R_a)$ assez grand, on peut appliquer le Théorème 6.3 à $u_{\varepsilon_k}(t)$ par rapport à la configuration $(\zeta_i(t), d_i)$ avec $R_0 = L = 2^n$. En tenant compte du fait que $B(K) \subset B(2^n)$, on trouve

$$\int_{B(K)\setminus \cup B(\zeta_i(t),r)} e_{\varepsilon_k}(|u_{\varepsilon_k}(t)|) + \frac{1}{8}\Big|\frac{j(u_{\varepsilon_k}(t))}{|u_{\varepsilon_k}(t)|} - j(u^*(\zeta_i(t),d_i))\Big|^2 \le \Sigma_{\varepsilon_k}(t) + C(\varepsilon_k, \eta_k, 2^{-n}),$$

d'où la première inégalité du lemme puisque $K \le 2^n$. Il ne reste ensuite plus qu'à intégrer l'inégalité précédente sur $[t_1,t_2]$, puis à faire tendre d'abord k, puis n vers l'infini pour obtenir la seconde inégalité. □

Le résultat précédent conduit de manière naturelle à considérer l'ensemble formé par les trajectoires

$$\mathcal{T} = \{(t, \zeta_i(t)),\ t \in [0,T],\ i = 1,\dots,l\}$$

et son complémentaire

$$\mathcal{G} = [0,T] \times \mathbb{R} \setminus \mathcal{T}.$$

Proposition 6.5. *Il existe une sous-suite, toujours notée ε_k, telle que*

$$\frac{j(u_{\varepsilon_k})}{|u_{\varepsilon_k}|} \rightharpoonup j(u^*(\zeta_i(\cdot), d_i))$$

faiblement dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{G})$ lorsque $k \to +\infty$.

Démonstration. Considérons un sous-ensemble borné B de $\mathbb{R}^2$. On déduit immédiatement du Lemme 6.8 que

$$\operatorname{rot}\big(j(u_{\varepsilon_k})\big) = 2Ju_{\varepsilon_k} \to 2\pi\sum_{i=1}^{l} d_i\delta_{\zeta_i(\cdot)} = \operatorname{rot} j(u^*(\zeta_i(\cdot), d_i)) \tag{6.32}$$

au sens des distributions sur $[0,T] \times B$.

On prétend d'autre part que

$$\mathrm{div}\big(j(u_{\varepsilon_k})\big) \to 0 = \mathrm{div} j(u^*(\zeta_i(\cdot), d_i)) \tag{6.33}$$

au sens des distributions sur $[0,T] \times B$.

En effet, en formant le produit extérieur de $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$ par u_{ε_k}, on trouve

$$\kappa_{\varepsilon_k} u_{\varepsilon_k} \times \partial_t u_{\varepsilon_k} + u_{\varepsilon_k} \cdot \partial_t u_{\varepsilon_k} = u_{\varepsilon_k} \times \Delta u_{\varepsilon_k} = \mathrm{div}\big(j(u_{\varepsilon_k})\big),$$

d'où

$$\mathrm{div}\big(j(u_{\varepsilon_k})\big) = \kappa_{\varepsilon_k} u_{\varepsilon_k} \times \partial_t u_{\varepsilon_k} + \frac{1}{2}\varepsilon_k \frac{d}{dt}\left(\frac{|u_{\varepsilon_k}|^2 - 1}{\varepsilon_k}\right). \tag{6.34}$$

Par ailleurs, le Lemme 6.3 appliqué à u_{ε_k} garantit que

$$\sup_{[0,T]} E_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}(t), B) \leq \pi l |\ln \varepsilon_k| + \Sigma_{\varepsilon_k}(t) + C \leq \pi l |\ln \varepsilon_k| + C, \tag{6.35}$$

où la seconde inégalité est une conséquence de (6.25). Il en résulte que $|u_{\varepsilon_k}| \to 1$ dans $L^\infty([0,T], L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2))$ et que u_{ε_k} est bornée dans $L^\infty([0,T], L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2))$ pour tout $1 \leq q \leq 4$. On en déduit en outre que le second terme du membre de droite de (6.34) tend vers zéro au sens des distributions sur $[0,T] \times B$. Afin de montrer qu'il en est de même pour le premier terme, on applique d'abord l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis on combine l'estimation fournie par le Lemme 6.6 pour $\|\partial_t u_{\varepsilon_k}\|_{L^2}$ et le fait que $\|u_{\varepsilon_k}\|_{L^2(B)}$ est uniformément bornée. La convergence (6.33) s'ensuit.

Par ailleurs, la convergence du Lemme 6.8 alliée à la borne (6.35) entraîne que $j(u_{\varepsilon_k})$ est uniformément bornée dans $L^p_{\mathrm{loc}}([0,T] \times \mathbb{R})$ pour tout $p < 2$. Ceci résulte par exemple du Théorème 3.2.1 dans [53] et des remarques qui suivent ce dernier. D'après (6.32) et (6.33), on a donc (à sous-suite près)

$$j(u_{\varepsilon_k}) \rightharpoonup j_1 = j(u^*(\zeta_i(\cdot), d_i)) + H \tag{6.36}$$

faiblement dans $L^p_{\mathrm{loc}}([0,T] \times \mathbb{R}^2)$, où $H = H(t,x)$ est harmonique en la variable d'espace.

D'autre part, d'après la première partie du Lemme 6.9, il existe $j_2 \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{G})$ tel que, à sous-suite près, $j(u_{\varepsilon_k})/|u_{\varepsilon_k}|$ converge vers j_2 faiblement dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{G})$.

En tenant compte de la convergence de $|u_{\varepsilon_k}|$ vers 1 dans $L^2_{\mathrm{loc}}([0,T] \times \mathbb{R}^2)$, on découvre que $j_1 = j_2 \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{G})$. Au vu de (6.36), le second volet du Lemme 6.9 nous donne alors

$$\|H\|_{L^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{G})} \leq \liminf_{k \to +\infty} \left\| \frac{j(u_{\varepsilon_k})}{|u_{\varepsilon_k}|} - j(u^*(\zeta_i, d_i)) \right\|_{L^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{G})} \leq CT,$$

où C ne dépend que de K_1, R et r_a, soit finalement $\|H\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^2)} \leq CT$. Puisque H est harmonique, un résultat classique de régularité elliptique assure que $H(t,\cdot)$ est uniformément bornée sur $\mathbb{R}^2$ pour presque tout t. Par conséquent H est nulle d'après le théorème de Liouville. Grâce à (6.36), on obtient finalement $j_1 = j_2 = j(u^*(\zeta_i(\cdot), d_i))$ dans $\mathcal{G}$, et la conclusion s'ensuit. $\square$

6.7 Démonstration du Théorème 6.1.

La dernière étape de la démonstration du Théorème 6.1 est présentée dans cette section. Rappelons que les $\{\zeta_i(t)\}$ désignent les l trajectoires lipschitziennes sur $[0,T]$ données par le Théorème 6.4 et les $\{z_i(t)\}$ forment l'unique solution de (6.4) définie sur $I=[0,T^*)$. Afin de démontrer que les trajectoires z_i et ζ_i sont égales, nous établirons dans un premier temps qu'elles coïncident sur $[0,T]$. D'après le théorème de Rademacher, les ζ_i sont dérivables et leurs dérivées sont bornées presque partout sur $[0,T]$. Sans perte de généralité, nous supposerons que $T<T^*$, de sorte que

$$|\dot{z}_i(t)| \leq C \quad \text{et} \quad |\dot{\zeta}_i(t)| \leq C \qquad \text{p.p. dans } [0,T]. \tag{6.37}$$

De plus, nous supposerons, quitte à diminuer T, que $|z_i(t)-\zeta_i(t)| \leq r_a/2$ pour tout i, par conséquent $z_i(t)$ reste dans $B(z_i^0, r_a)$ sur $[0,T]$. On introduit les quantités

$$h(t) = \sum_{i=1}^{l} \int_0^t |\dot{z}_i(s) - \dot{\zeta}_i(s)|\, ds, \qquad \sigma(t) = \sum_{i=1}^{l} |z_i(t)-\zeta_i(t)|.$$

Alors h est lipschitzienne sur $[0,T]$ et l'on a

$$h'(t) = \sum_{i=1}^{l} |\dot{z}_i(t) - \dot{\zeta}_i(t)|, \quad \text{p.p. } t \in [0,T].$$

Par ailleurs, σ est absolument continue et $\sigma(0)=0$, d'où

$$\sigma(t) = \int_0^t \sigma'(s)\, ds \leq h(t), \quad \forall t \in [0,T].$$

Il suffit donc de montrer que h est nulle sur $[0,T]$, ce que nous établirons au moyen d'une inégalité de Gronwall.

Lemme 6.10. *Pour $t_1, t_2, t \in [0,T]$, on a*

$$\limsup_{k\to+\infty} \Sigma_{\varepsilon_k}(t) \leq C h(t)$$

et

$$\limsup_{k\to+\infty} \int_{t_1}^{t_2} \Sigma_{\varepsilon_k}(s)\, ds \leq C \int_{t_1}^{t_2} h(s)\, ds,$$

où C ne dépend que de r_a, K_0, R_a.

Démonstration. On décompose $\Sigma_{\varepsilon_k}(t)$ comme

$$\begin{aligned}\Sigma_{\varepsilon_k}(t) = E_{\varepsilon_k,[U_d]}\left(u_{\varepsilon_k}(t)\right) - E_{\varepsilon_k,[U_d]}(u^0_{\varepsilon_k}) + \Sigma_{\varepsilon_k}(0) \\ + E_{\varepsilon_k,[U_d]}\left(u^*_{\varepsilon_k}(z_i^0, d_i)\right) - E_{\varepsilon_k,[U_d]}\left(u^*_{\varepsilon_k}(\zeta_i(t), d_i)\right),\end{aligned}$$

d'où, d'après le Corollaire 6.1 et le Théorème 5.5,

$$\Sigma_{\varepsilon_k}(t) = -\delta \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\partial_t u_{\varepsilon_k}|^2}{|\ln \varepsilon_k|} + \Sigma_{\varepsilon_k}(0) + W(z_i^0, d_i) - W(\zeta_i(t), d_i) + o_{\varepsilon_k}(1).$$

Puisque W est localement lipschitzienne en dehors de l'origine, on a

$$\begin{aligned}W(z_i^0,d_i)-W(\zeta_i(t),d_i) &= W(z_i^0,d_i)-W(z_i(t),d_i)+W(z_i(t),d_i)-W(\zeta_i(t),d_i)\\ &\le -\int_0^t\sum_{i=1}^l \dot z_i(s)\cdot\nabla_{z_i}W(z_i(s))\,ds + C\sigma(t).\end{aligned}$$

D'après le système (6.4) vérifié par les z_i, un calcul explicite nous donne

$$\dot z_i(s)\cdot\nabla_{z_i}W(z_i(s)) = -\frac{\delta}{\pi(1+\delta^2)}|\nabla_{z_i}W|^2 = -\delta\pi|\dot z_i(s)|^2,$$

d'où

$$\Sigma_{\varepsilon_k}(t)\le\Sigma_{\varepsilon_k}(0)+\delta\pi\int_0^t\sum_{i=1}^l|\dot z_i(s)|^2\,ds-\delta\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\partial_t u_{\varepsilon_k}|^2}{|\ln\varepsilon_k|}+C\sigma(t)+o_{\varepsilon_k}(1).$$

L'étape suivante consiste à déterminer une borne inférieure pour le terme de dissipation lorsque ε tend vers zéro. Rappelons d'une part que

$$Ju_{\varepsilon_k}(t)\rightharpoonup\pi\sum_{i=1}^l d_i\zeta_i(t)\quad\text{dans}\quad B(R'),$$

et d'autre part que

$$\sup_{t\in[0,T]}E_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}(t),B(R'))\le\pi l|\log\varepsilon_k|+C.$$

Sous ces hypothèses, la Proposition 3 de [59] (ou bien le Corollaire 7 de [74]) assure que

$$\liminf_{k\to+\infty}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\partial_t u_{\varepsilon_k}|^2}{|\ln\varepsilon_k|}\ge\pi\sum_{i=1}^l\int_0^t|\dot\zeta_i(t)|^2\,ds. \tag{6.38}$$

Ensuite, on obtient à l'aide de (6.37)

$$\sum_{i=1}^l\int_0^t\left(|\dot z_i(s)|^2-|\dot\zeta_i(s)|^2\right)\le C\sum_{i=1}^l\int_0^t|\dot z_i(s)-\dot\zeta_i(s)|\,ds=Ch(t),$$

et d'autre part

$$\limsup_{k\to+\infty}\Sigma_{\varepsilon_k}(0)\le 0$$

d'après (BP$_3$), d'où finalement

$$\limsup_{k\to+\infty}\Sigma_{\varepsilon_k}(t)\le C\left(\sigma(t)+h(t)\right).$$

Le lemme de Fatou appliqué à (6.38) nous fournit également la version intégrale de l'inégalité précédente, et l'on conclut grâce au fait que $\sigma\le h$. □

Comme nous l'avons vu au Paragraphe 6.3, la fonction $u^*(z_i(t),d_i)$ constitue en quelque sorte une solution asymptotique de la formule d'évolution établie à la Proposition 6.2.

Lemme 6.11. *Pour $t \in [0,T]$ et $(\chi,\varphi) \in \mathcal{H}(z_i^0)$, on a*

$$\pi \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{l} [d_i \chi(z_i(t)) + \delta \varphi(z_i(t))] = -2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{Im}\Big(\omega(u^*(z_i(t), d_i)) \frac{\partial^2 \chi}{\partial \bar{z}^2}\Big).$$

Démonstration. D'une part, on connaît une formule explicite pour le terme de droite (voir [49]) : pour toute configuration (z_i, d_i) et pour toute fonction test χ affine au voisinage de chaque $z_i = z_i(t)$, on a

$$-2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{Im}\Big(\omega(u^*(z_i,d_i)) \frac{\partial^2 \chi}{\partial \bar{z}^2}\Big) = -2\pi \sum_{i \neq j} d_i d_j \frac{(z_i - z_j)^\perp}{|z_i - z_j|^2} \cdot \nabla \chi(z_i).$$

D'autre part, un calcul immédiat donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{l} [d_i \chi(z_i) + \delta \varphi(z_i)] &= \sum_{i=1}^{l} [d_i \nabla \chi(z_i) \cdot \dot{z}_i(t) + \delta \nabla \varphi(z_i) \cdot \dot{z}_i(t)] \\ &= \sum_{i=1}^{l} d_i \nabla \chi(z_i) \cdot \big(\dot{z}_i(t) - \delta d_i \dot{z}_i{}^\perp(t)\big), \end{aligned}$$

où la seconde égalité résulte du fait que $\nabla \varphi(z_i) = \nabla^\perp \chi(z_i)$. D'après le système (6.4) pour les z_i, on a ensuite

$$\pi\big(\dot{z}_i(t) - \delta d_i \dot{z}_i{}^\perp(t)\big) = d_i \nabla_{z_i}^\perp W,$$

d'où

$$\pi \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{l} [d_i \chi(z_i) + \delta \varphi(z_i)] = \sum_{i=1}^{l} \nabla \chi(z_i) \cdot \nabla_{z_i}^\perp W = -2\pi \sum_{i \neq j} d_i d_j \frac{(z_i - z_j)^\perp}{|z_i - z_j|^2} \cdot \nabla \chi(z_i),$$

et la conclusion s'ensuit. □

Lemme 6.12. *Soient $A = \cup_{i=1}^{l} B(z_i^0, 2r_a) \setminus B(z_i^0, r_a)$ et $t_1, t_2 \in [0,T]$. Pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(A)$, on a*

$$\limsup_{k \to +\infty} \Big| \int_{t_1}^{t_2} \int_A \big[\omega(u_{\varepsilon_k}(s)) - \omega(u^*(\zeta_i(s), d_i))\big] \varphi \Big| \leq C \|\varphi\|_\infty \int_{t_1}^{t_2} h(s)\, ds.$$

Démonstration. En appliquant l'identité (6.8) à $u \equiv u_{\varepsilon_k}(t)$ et $u^* \equiv u^*(\zeta_i(t), d_i)$ tout en tenant compte du fait que $|u^*(\zeta_i(t), d_i)| = 1$, on obtient

$$\omega(u) - \omega(u^*) = \sum_{k,l=1}^{2} \Big(a_{k,l} \partial_l |u| \partial_k |u| + b_{k,l} \Big[\frac{j_k(u)}{|u|} \frac{j_l(u)}{|u|} - j_k(u^*) j_l(u^*)\Big]\Big),$$

où $a_{k,l}, b_{k,l} \in \mathbb{C}$. On exprime alors les termes faisant intervenir j de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{j_k(u)}{|u|} \frac{j_l(u)}{|u|} - j_k(u^*) j_l(u^*) = &\Big(\frac{j_k(u)}{|u|} - j_k(u^*)\Big)\Big(\frac{j_l(u)}{|u|} - j_l(u^*)\Big) \\ &+ j_k(u^*)\Big(\frac{j_l(u)}{|u|} - j_l(u^*)\Big) + j_l(u^*)\Big(\frac{j_k(u)}{|u|} - j_k(u^*)\Big). \end{aligned}$$

Ensuite, on multiplie l'égalité précédente par φ puis on intègre sur $[t_1, t_2] \times A$ et on fait tendre k vers l'infini. Puisque $[0, T] \times A$ est inclus dans $\mathcal{G}$ et $j(u^*) \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{G})$, on déduit de la Proposition 6.5 que

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to+\infty} \Big| \int_{t_1}^{t_2} \int_A \big[\omega\left(u_{\varepsilon_k}(s)\right) - \omega\left(u^*(\zeta_i(s), d_i)\right)\big]\varphi \Big| \\
\leq C\|\varphi\|_\infty \limsup_{k\to+\infty} \int_{t_1}^{t_2} \int_A \Big[|\nabla |u_{\varepsilon_k}||^2 + \Big|\frac{j(u_{\varepsilon_k})}{|u_{\varepsilon_k}|} - j(u^*(\zeta_i, d_i))\Big|^2\Big].
\end{aligned}$$

Il ne nous reste alors plus qu'à invoquer les Lemmes 6.9 et 6.10 pour obtenir le résultat souhaité. $\square$

On peut à présent compléter la démonstration du Théorème 6.1. Soit $(\chi, \varphi) \in \mathcal{H}(z_i^0)$. Pour $0 \leq s \leq t \leq T$ fixés, on a d'après la Proposition 6.2

$$\int_s^t \frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}^2} \big[J u_{\varepsilon_k}(\tau)\chi + \delta \int_{\mathbb{R}^2} \mu_{\varepsilon_k}(\tau)\varphi\big]\, d\tau = \int_s^t g_k^1(\tau)\, d\tau + \int_s^t g_k^2(\tau)\, d\tau,$$

où g_k^1 est donné par

$$g_k^1(\tau) = -\delta \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\partial_t u_{\varepsilon_k}|^2}{|\log \varepsilon_k|^2} + R_{\varepsilon_k}(\tau, \chi, \varphi, u_{\varepsilon_k})$$

et g_k^2 par

$$g_k^2(\tau) = -2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{Im}\Big(\omega(u_{\varepsilon_k}(\tau)) \frac{\partial^2 \chi}{\partial \overline{z}^2}\Big).$$

On peut récrire ce dernier terme sous la forme

$$\begin{aligned}
g_k^2 = &-2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{Im}\Big(\big[\omega(u_{\varepsilon_k}) - \omega(u^*(\zeta_i, d_i))\big] \frac{\partial^2 \chi}{\partial \overline{z}^2}\Big) \\
&- 2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{Im}\Big(\big[\omega(u^*(\zeta_i, d_i)) - \omega(u^*(z_i, d_i))\big] \frac{\partial^2 \chi}{\partial \overline{z}^2}\Big) \\
&- 2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{Im}\Big(\omega(u^*(z_i, d_i)) \frac{\partial^2 \chi}{\partial \overline{z}^2}\Big) = A_k + B_k + C_k.
\end{aligned}$$

En insérant la relation établie au Lemme 6.11 pour C_k, et en posant

$$f_{k,\chi,\varphi}(\tau) = \int_{\mathbb{R}^2} J u_{\varepsilon_k}(\tau)\chi + \delta \int_{\mathbb{R}^2} \mu_{\varepsilon_k}(\tau)\varphi - \pi \sum_{i=1}^{l} \big[d_i \chi(z_i(\tau)) + \delta\varphi(z_i(\tau))\big],$$

on constate que

$$f_{k,\chi,\varphi}(t) - f_{k,\chi,\varphi}(s) = \int_s^t g_k^1(\tau)\, d\tau + \int_s^t A_k(\tau)\, d\tau + \int_s^t B_k(\tau)\, d\tau.$$

Tout d'abord, le Lemme 6.6 avec $T_\varepsilon = T$ implique immédiatement que

$$\Big| \int_s^t g_k^1(\tau)\, d\tau \Big| \leq C |\ln \varepsilon_k|^{-\frac{1}{2}}.$$

De plus, puisque supp $\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial\bar{z}^2}\right) \subset A$, on déduit du Lemme 6.12 que

$$\limsup_{k\to+\infty}\Big|\int_s^t A_k(\tau)\,d\tau\Big| \le C\int_s^t h(\tau)\,d\tau.$$

Enfin, comme u^*, et donc $\omega(u^*)$, est régulière en dehors des vortex, on a aussi

$$\int_s^t |B_k(\tau)|\,d\tau \le C\int_s^t \sigma(\tau)\,d\tau \le C\int_s^t h(\tau)\,d\tau.$$

En faisant tendre k vers l'infini et en utilisant les résultats de convergence du Théorème 6.4, on obtient ainsi

$$|f_{\chi,\varphi}(t) - f_{\chi,\varphi}(s)| \le C\int_s^t h(\tau)\,d\tau, \tag{6.39}$$

où $f_{\chi,\varphi}$ est définie par

$$f_{\chi,\varphi} = \pi\sum_{i=1}^{l}\Big[d_i\big(\chi(\zeta_i)-\chi(z_i)\big) + \delta\big(\varphi(\zeta_i)-\varphi(z_i)\big)\Big].$$

Soulignons que la constante C ne dépend que de χ, φ et de (z_i^0, d_i).

Fixons alors un temps $t \in [0,T]$ en lequel tous les ζ_i sont dérivables. Comme les z_i sont de classe C^1, on a

$$f'_{\chi,\varphi}(t) = \pi\sum_{i=1}^{l}\big(d_i\nabla\chi(z_i^0) + \delta\nabla^\perp\chi(z_i^0)\big)\cdot\big(\dot\zeta_i(t) - \dot z_i(t)\big).$$

En divisant l'inégalité (6.39) par $|t-s|$ puis en faisant tendre s vers t, on est conduit à

$$\Big|\pi\sum_{i=1}^{l}\big(d_i\nabla\chi(z_i^0) + \delta\nabla^\perp\chi(z_i^0)\big)\cdot\big(\dot\zeta_i(t) - \dot z_i(t)\big)\Big| \le C\,h(t).$$

En particulier, si la paire $(\chi,\varphi) \in \mathcal{H}(z_i^0)$ est choisie de sorte que χ et φ s'annulent près de chaque point z_i^0 à l'exception d'un seul, l'estimation précédente se réduit à

$$\Big|\pi\big(d_i\nabla\chi(z_i^0) + \delta\nabla^\perp\chi(z_i^0)\big)\cdot\big(\dot\zeta_i(t) - \dot z_i(t)\big)\Big| \le C\,h(t), \quad \forall i = 1,\dots,l.$$

Pour obtenir l'inégalité souhaitée, il ne nous reste plus qu'à choisir successivement

$$\chi(x) = x_1, \quad \nabla\chi = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^\perp\chi = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

et

$$\chi(x) = x_2, \quad \nabla\chi = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^\perp\chi = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

auprès de chaque z_i^0. On parvient ainsi à $|\dot\zeta_i(t) - \dot z_i(t)| \le Ch(t)$ pour chaque i, d'où, après addition,

$$h'(t) \le Ch(t) \qquad \text{p.p. } t \in [0,T].$$

Puisque $h(0) = 0$, on trouve que $h \equiv 0$ sur $[0, T]$, comme on le désirait. On déduit ensuite du Lemme 6.10 que

$$\limsup_{k \to +\infty} \Sigma_{\varepsilon_k}(t) \leq 0.$$

D'après (6.24), ceci signifie que la famille $(u_{\varepsilon_k}(t))_{k \in \mathbb{N}}$ reste très bien préparée par rapport à la configuration $(z_i(t), d_i)$ pour tout $t \in [0, T]$. Puisque les $z_i(t)$ sont déterminés de manière unique par le système (6.4), on conclut par unicité de la limite que toute la famille $(u_\varepsilon(t))_{0<\varepsilon<1}$ est très bien préparée.

Enfin, on observe que T ne dépend que de K_1, r_a et $\max(R, R_a + r_a)$. Ainsi, en répétant les arguments précédents, on peut étendre tous les résultats de cette section à l'intervalle $[0, T^*)$ en entier. La démonstration du Théorème 6.1 est ainsi achevée. $\square$

Chapitre 7

Dynamique des ondes amorties pour l'équation de Ginzburg-Landau complexe

Ce chapitre est inclus dans [71].

7.1 Introduction.

Considérons l'équation de Ginzburg-Landau complexe

$$\partial_t \Phi = (\kappa + i)\big[\Delta\Phi + \Phi(1 - |\Phi|^2)\big], \tag{GLC}$$

où $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, $N \geq 1$, est à valeurs complexes, et où κ est un petit paramètre positif. Lorsque κ est nul, cette équation se réduit à l'équation de Gross-Pitaevskii. Dans ce chapitre, nous supposerons que le coefficient de dissipation κ tend vers zéro avec un paramètre ε.

On se propose de considérer pour (GLC) un régime où la solution Φ ne s'annule en aucun point de l'espace, du moins initialement. Tant qu'il en est ainsi, on peut écrire Φ sous la forme

$$\Phi = r \exp(i\phi),$$

où le module r et la phase ϕ satisfont au système d'équations

$$\begin{cases} \partial_t r^2 = 2\kappa \left[r\Delta r - r^2|\nabla\phi|^2 + r^2(1 - r^2)\right] - 2\mathrm{div}\,(r^2\nabla\phi) \\ r^2\partial_t\phi = \kappa\,\mathrm{div}\,(r^2\nabla\phi) + r\Delta r - r^2|\nabla\phi|^2 + r^2(1 - r^2). \end{cases} \tag{7.1}$$

On se focalise plus spécifiquement sur un régime asymptotique onde-longue où Φ se comporte comme une petite perturbation d'une fonction constante de module un ; de telles fonctions constituent des solutions particulières élémentaires de (GLC). Dans ce régime, on suppose que le module r et le gradient de la phase $\nabla\phi$ s'écrivent par le biais du changement d'inconnues

$$\begin{cases} r^2(t, x) = 1 + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b_\varepsilon(\varepsilon^2 t, \varepsilon x) \\ 2\nabla\phi(t, x) = \varepsilon v_\varepsilon(\varepsilon^2 t, \varepsilon x), \end{cases} \tag{7.2}$$

où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre destiné à tendre vers zéro, et on suppose en outre que le couple $(b_\varepsilon, v_\varepsilon)$ appartient à un espace de Sobolev $H^{s+1} \times H^s$ avec $s \geq 3$ et vérifie certaines bornes.

On se place dorénavant dans la situation où κ dépend de ε et vérifie

$$\kappa = \kappa_\varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \kappa_\varepsilon = 0.$$

L'objectif de ce chapitre est de déterminer des équations simplifiées permettant de décrire la dynamique de la perturbation $(b_\varepsilon, v_\varepsilon)$, tant que celle-ci est bien définie, lorsque ε tend vers zéro. Dans une large mesure, ce problème est motivé par le Chapitre 6, où nous avons étudié la dynamique des points vortex pour l'équation bidimensionnelle[35]

$$\partial_t \Psi_\varepsilon = (\kappa_\varepsilon + i)\big[\Delta\Psi_\varepsilon + \frac{\Psi_\varepsilon}{\varepsilon^2}(1 - |\Psi_\varepsilon|^2)\big], \quad \Psi_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \tag{GLC$_\varepsilon$}$$

lorsque ε tend vers zéro. Cette dernière se déduit de (GLC) par le changement de variable parabolique

$$\Psi_\varepsilon(t, x) = \Phi(\varepsilon^{-2} t, \varepsilon^{-1} x).$$

[35] En réalité, l'équation considérée au Chapitre 6 se déduit de $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$ par conjugaison complexe $\Psi_\varepsilon \mapsto \overline{\Psi}_\varepsilon$ et changement d'échelle en temps $t \mapsto (\kappa_\varepsilon^2 + 1)^{-1} t$, notons toutefois que $\kappa_\varepsilon^2 + 1 \simeq 1$.

Pour observer le mouvement des points vortex, le coefficient de dissipation κ_ε ad hoc était de l'ordre de $|\ln \varepsilon|^{-1}$ et les données étaient très bien préparées. Dans la situation décrite par (7.2) sur laquelle nous nous focalisons à présent, aucun vortex n'est présent puisque la solution ne s'annule pas. Toutefois, l'analyse du régime (7.2) pourrait constituer une première étape dans la compréhension du rôle joué par la phase dans le mouvement des vortex pour des données moins bien préparées.

Lorsque ε tend vers zéro, les équations réduites pour la perturbation se dégagent en fait plus nettement dans une échelle de temps ralentie. Plus exactement, on adopte un scaling d'ordre hyperbolique plutôt que parabolique. On considère la nouvelle variable $(a_\varepsilon, u_\varepsilon)$ définie par

$$\begin{cases} a_\varepsilon(t,x) = b_\varepsilon(\varepsilon t, x) \\ u_\varepsilon(t,x) = v_\varepsilon(\varepsilon t, x). \end{cases}$$

En considérant le gradient de l'équation pour la phase dans le système (7.1), puis en insérant les variables a_ε et u_ε, on obtient

$$\begin{cases} \partial_t a_\varepsilon + \sqrt{2}\operatorname{div} u_\varepsilon + \dfrac{2\kappa_\varepsilon}{\varepsilon} a_\varepsilon - \kappa_\varepsilon \varepsilon \Delta a_\varepsilon = \mathrm{f}_\varepsilon(a_\varepsilon, u_\varepsilon) \\ \partial_t u_\varepsilon + \sqrt{2}\nabla a_\varepsilon - \kappa_\varepsilon \varepsilon \Delta u_\varepsilon = \mathrm{g}_\varepsilon(a_\varepsilon, u_\varepsilon), \end{cases} \tag{7.3}$$

où les seconds membres f_ε et g_ε sont donnés par

$$\begin{cases} \mathrm{f}_\varepsilon(a_\varepsilon, u_\varepsilon) = \sqrt{2}\kappa_\varepsilon \Big[-2|\nabla \rho_a|^2 - \rho_a^2 \dfrac{|u_\varepsilon|^2}{2} - a_\varepsilon^2 \Big] - \varepsilon \operatorname{div}(a_\varepsilon u_\varepsilon) \\ \mathrm{g}_\varepsilon(a_\varepsilon, u_\varepsilon) = \kappa_\varepsilon \varepsilon \nabla \Big(\dfrac{\nabla \rho_a^2}{\rho_a^2} \cdot u_\varepsilon \Big) + 2\varepsilon \nabla \Big(\dfrac{\Delta \rho_a}{\rho_a} \Big) - \varepsilon u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon, \end{cases} \tag{7.4}$$

avec

$$\rho_a^2 = 1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} a_\varepsilon.$$

D'un point de vue purement formel, puisque ε et κ_ε sont des paramètres évanescents, les seconds membres f_ε et g_ε peuvent être considérés comme des perturbations et négligés. En première approximation, l'équation asymptotique ainsi obtenue est une *équation des ondes amorties*

$$\begin{cases} \partial_t a_\varepsilon + \sqrt{2}\operatorname{div} u_\varepsilon + \dfrac{2\kappa_\varepsilon}{\varepsilon} a_\varepsilon = 0 \\ \partial_t u_\varepsilon + \sqrt{2}\nabla a_\varepsilon = 0, \end{cases} \tag{OA}$$

dont la vitesse de propagation vaut $\sqrt{2}$ et le coefficient d'amortissement $2\nu_\varepsilon$, où

$$\nu_\varepsilon = \frac{\kappa_\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Notre premier enjeu consiste à déterminer la taille maximale autorisée pour la perturbation initiale $(a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)$ qui garantisse qu'une solution Φ définie initialement par (7.2) ne s'annule pas au moins jusqu'à un temps T indépendant de ε. On peut alors définir $(a_\varepsilon, u_\varepsilon)$ jusqu'au temps T. Une fois cette question résolue, on montrera que $(a_\varepsilon, u_\varepsilon)$ se comporte comme la solution[36] de l'équation des ondes amorties avec même donnée initiale $(a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)$ lorsque ε tend vers zéro.

[36]Il est aisé de vérifier, au moyen d'estimations d'énergie, que (OA) admet une unique solution globale dans $C(H^{s+1} \times H^s)$.

Le paramètre ε décrit la taille de la perturbation de la solution Φ par rapport à un champ constant de module égal à un, et le paramètre κ_ε l'ampleur de la diffusion ajoutée à l'équation de Gross-Pitaevskii pour obtenir l'équation de Ginzburg-Landau complexe. À en juger par les expressions (7.4) pour f_ε et g_ε, l'approximation par l'équation des ondes amorties semble optimale lorsque κ_ε et ε sont de même ordre. D'un autre côté, le facteur d'amortissement ν_ε, qui améliore les estimations de comparaison entre les solutions de (7.3) et celles de (OA), est d'autant plus efficace que ε est petit par rapport à κ_ε. Il faudra donc trouver le bon équilibre entre ces deux paramètres. Afin de ne pas multiplier les études de cas, nous nous restreindrons dorénavant à la situation

$$0 < \varepsilon \leq \kappa_\varepsilon < 1,$$

situation qui contient bien sûr le cas $\kappa_\varepsilon = |\ln \varepsilon|^{-1}$.

Un régime asymptotique[37] semblable pour les solutions de l'équation de Gross-Pitaevskii, obtenue avec $\kappa_\varepsilon = 0$, a été récemment étudié par Bethuel, Danchin et Smets [46]. L'article [46] procure une borne inférieure pour T_ε, où T_ε est le premier temps d'apparition éventuelle d'un zéro de la solution. En outre, il est établi que $(a_\varepsilon, u_\varepsilon)$ est asymptotiquement proche de la solution de l'équation des ondes libres ($\nu_\varepsilon = 0$) avec même donnée initiale sur $[0, T_\varepsilon)$.

Dans ce chapitre, nous obtiendrons des résultats sensiblement différents. Nous démontrerons que $T_\varepsilon = +\infty$ pourvu que la perturbation initiale soit convenablement bornée. En outre, grâce à la partie dissipative de (GLC), on perdra moins de dérivées en mesurant l'écart entre $(a_\varepsilon, u_\varepsilon)$ et la solution de l'équation des ondes amorties.

Théorème 7.1. *Soit s un entier vérifiant $s > 1+N/2$. Il existe des constantes strictement positives K_1 et K_2 ne dépendant que de s et N et il existe $\varepsilon_0 > 0$ satisfaisant à la propriété suivante.*

Soient $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et $(a_\varepsilon^0, \varphi_\varepsilon^0) \in H^{s+1}(\mathbb{R}^N) \times H^{s+1}(\mathbb{R}^N)$ vérifiant

$$X_0 := \|(a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)\|_{H^s} + \varepsilon \|a_\varepsilon^0\|_{H^{s+1}} + \|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2} \leq \frac{\min(\nu_\varepsilon, \kappa_\varepsilon^{-1})}{K_1(s,N)},$$

où $u_\varepsilon^0 = 2\nabla\varphi_\varepsilon^0$. Alors le système (7.3) admet une unique solution globale $(a_\varepsilon, u_\varepsilon) \in C(\mathbb{R}_+, H^{s+1} \times H^s)$ telle que $(a_\varepsilon, u_\varepsilon)(0) = (a_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$(\varepsilon\kappa_\varepsilon^{-1})^{1/2} \|(a_\varepsilon, u_\varepsilon)\|_{L^2_t(H^s)} + \|(a_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t))\|_{H^s} + \varepsilon \|a_\varepsilon(t)\|_{H^{s+1}} \leq K_2(s,N) X_0.$$

Enfin, si Φ désigne la solution correspondante de (GLC), on a

$$\||\Phi(t)|^2 - 1\|_\infty < \frac{1}{2}.$$

Remarque 7.1. *Le Théorème 7.1 autorise des données initiales de la forme*

$$\Phi^0(x) = \Big(1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} a^0(\varepsilon x)\Big)^{1/2} \exp(i\varphi^0(\varepsilon x)),$$

[37] L'équation de Gross-Pitaevskii présente une grande variété de régimes asymptotiques remarquables dont [51] constitue un état de l'art récent.

pour tout $(a^0,\varphi^0)\in H^{s+1}\times H^{s+1}$ *indépendant de* ε*, de sorte que* X_0 *est constant. Lorsque le coefficient de dissipation est donné par* $\kappa_\varepsilon=\sqrt{\varepsilon}$*, on a* $\nu_\varepsilon=\kappa_\varepsilon^{-1}$*, le Théorème 7.1 autorise alors les données initiales*

$$\Phi^0(x)=\Big(1+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}a^0(\varepsilon x)\Big)^{1/2}\exp\big(i\frac{\varphi^0(\varepsilon x)}{\sqrt{\varepsilon}}\big),$$

où (a^0,φ^0) *est indépendant de* ε *et vérifie* $\|(a^0,\varphi^0)\|_{H^{s+1}}\le K_1(s,N)^{-1}$*.*

Dans un second temps, les estimations du Théorème 7.1 permettent de mesurer l'écart de la solution $(a_\varepsilon,u_\varepsilon)$ à celle de l'équation des ondes amorties. Puisque les seconds membres de (7.3) font intervenir des dérivées d'ordre trois, les estimations de comparaison ainsi obtenues font état d'une perte de trois dérivées.

Théorème 7.2. *Soit* s *un entier vérifiant* $s>1+N/2$*. Soit* $(a_\varepsilon^0,\varphi_\varepsilon^0)\in H^{s+1}(\mathbb{R}^N)\times H^{s+1}(\mathbb{R}^N)$ *vérifiant les hypothèses du Théorème 7.1. On note* $u_\varepsilon^0=2\nabla\varphi_\varepsilon^0$*.*

Soit $(a_L,u_L)\in C(\mathbb{R}_+,H^{s+1}\times H^s)$ *la solution de l'équation des ondes amorties avec donnée initiale* $(a_\varepsilon^0,u_\varepsilon^0)$*. Il existe une constante* K_3 *ne dépendant que de* s *et* N *telle que pour tout* $t\in\mathbb{R}_+$*, on a*

$$\|(a_\varepsilon-a_L,u_\varepsilon-u_L)(t)\|_{H^{s-2}}\le K_3(s,N)\sqrt{\varepsilon t}\Big(\sqrt{\kappa_\varepsilon}X_0^2+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\kappa_\varepsilon}}X_0\Big),$$

où X_0 *est défini au Théorème 7.1.*

Reprenons l'exemple cité ci-dessus des données initiales de la forme

$$\Phi^0(x)=\Big(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}a^0(\varepsilon x)\Big)^{1/2}\exp(i\varphi^0(\varepsilon x))$$

pour lesquelles X_0 est une constante. Au vu du Théorème 7.2, l'équation des ondes amorties fournit une approximation correcte de la dynamique de $(a_\varepsilon,u_\varepsilon)$ jusqu'à des temps de l'ordre de $T_\varepsilon=C(\kappa_\varepsilon\varepsilon)^{-1}$. Pour envisager des temps postérieurs à T_ε, il s'avère plus approprié de tenir compte des termes paraboliques linéaires du système (7.3). Plus précisément, on considère cette fois le système approché

$$\begin{cases}\partial_t a+\sqrt{2}\operatorname{div}u+\dfrac{2\kappa_\varepsilon}{\varepsilon}a-\kappa_\varepsilon\varepsilon\Delta a=0\\ \partial_t u+\sqrt{2}\nabla a-\kappa_\varepsilon\varepsilon\Delta u=0.\end{cases}\tag{7.5}$$

On obtient alors le résultat suivant

Théorème 7.3. *Soit* s *un entier vérifiant* $s>1+N/2$*. Soit* $(a_\varepsilon^0,\varphi_\varepsilon^0)\in H^{s+1}(\mathbb{R}^N)\times H^{s+1}(\mathbb{R}^N)$ *vérifiant les hypothèses du Théorème 7.1.*

On note $(a_L,u_L)\in C(\mathbb{R}_+,H^{s+1}\times H^s)$ *la solution de (7.5) avec donnée initiale* $(a_\varepsilon^0,u_\varepsilon^0)$*. Il existe une constante* K_4 *ne dépendant que de* s *et de* N *telle que pour tout* $t\in\mathbb{R}_+$

$$\|(a_\varepsilon-a_L,u_\varepsilon-u_L)(t)\|_{H^s}\le K_4(s,N)\kappa_\varepsilon^{-1}X_0(1+X_0).$$

On a en outre, pour les dérivées d'ordre inférieur,

$$\|(a_\varepsilon-a_L,u_\varepsilon-u_L)(t)\|_{H^{s-1}}\le K_4(s,N)\max(\kappa_\varepsilon,\nu_\varepsilon^{-1})X_0(1+X_0)$$

et

$$\|(a_\varepsilon-a_L,u_\varepsilon-u_L)(t)\|_{H^{s-1}}\le K_4(s,N)(\varepsilon\kappa_\varepsilon^{-1}t)^{1/2}X_0.$$

En revenant à notre exemple typique de données initiales, on voit que d'après les Théorèmes 7.2 et 7.3, la meilleure approximation jusqu'à des temps de l'ordre de $C(\kappa_\varepsilon\varepsilon)^{-1}$ est celle fournie par l'équation des ondes amorties. En revanche, au-delà de ces temps la meilleure approximation est celle du système d'équations (7.5). De plus, l'approximation par le système (7.5) présente l'avantage de faire gagner des dérivées dans les estimations de comparaison.

Les démonstrations des résultats de ce chapitre sont inspirées pour beaucoup de celles de [46].

Nous établirons les estimations des Théorèmes 7.1, 7.2 et 7.3 dans une échelle parabolique plutôt qu'hyperbolique, c'est-à-dire pour Ψ_ε et $(b_\varepsilon, v_\varepsilon)$ plutôt que pour Φ et $(a_\varepsilon, u_\varepsilon)$. Ceci présente l'avantage de supprimer un certain nombre de facteurs ε dans les équations. Dans cette échelle, on a

$$\Psi_\varepsilon(t,x) = \rho_\varepsilon(t,x)\exp\big(i\varphi_\varepsilon(t,x)\big),$$

où le module ρ_ε et le gradient de la phase $\nabla\varphi_\varepsilon$ sont donnés par

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon^2(t,x) = 1 + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b_\varepsilon(t,x) \\ 2\nabla\varphi_\varepsilon(t,x) = v_\varepsilon(t,x). \end{cases} \tag{7.6}$$

Le couple $(b_\varepsilon, v_\varepsilon)$ est en outre solution du système

$$\begin{cases} \partial_t b_\varepsilon + \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\operatorname{div} v_\varepsilon + \dfrac{2\kappa_\varepsilon}{\varepsilon^2} b_\varepsilon - \kappa_\varepsilon \Delta b_\varepsilon = \tilde{f}_\varepsilon(b_\varepsilon, v_\varepsilon) \\ \partial_t v_\varepsilon + \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\nabla b_\varepsilon - \kappa_\varepsilon\Delta v_\varepsilon = \tilde{g}_\varepsilon(b_\varepsilon, v_\varepsilon), \end{cases} \tag{7.7}$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{f}_\varepsilon(b_\varepsilon, v_\varepsilon) = \dfrac{\sqrt{2}\kappa_\varepsilon}{\varepsilon}\Big[- 2|\nabla\rho_\varepsilon|^2 - \rho_\varepsilon^2\dfrac{|v_\varepsilon|^2}{2} - b_\varepsilon^2\Big] - \operatorname{div}(b_\varepsilon v_\varepsilon) \\ \tilde{g}_\varepsilon(b_\varepsilon, v_\varepsilon) = \kappa_\varepsilon\nabla\Big(\dfrac{\nabla\rho_\varepsilon^2}{\rho_\varepsilon^2}\cdot v_\varepsilon\Big) + 2\nabla\Big(\dfrac{\Delta\rho_\varepsilon}{\rho_\varepsilon}\Big) - v_\varepsilon\cdot\nabla v_\varepsilon. \end{cases} \tag{7.8}$$

Au Chapitre 5, nous avons vu que l'énergie naturellement associée à $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$ est l'énergie de Ginzburg-Landau

$$E_\varepsilon(\Psi_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{|\nabla\Psi_\varepsilon|^2}{2} + \frac{(1-|\Psi_\varepsilon|^2)^2}{4\varepsilon^2}\Big]\,dx,$$

qui, d'un point de vue formel, est décroissante en temps. Lorsque le champ Ψ_ε est donné par (7.6) et lorsque $\||\Psi_\varepsilon| - 1\|_\infty \leq m < 1$, on a

$$E_\varepsilon(\Psi_\varepsilon) \simeq C\Big(\|b_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \varepsilon^2\|\nabla b_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|v_\varepsilon\|_{L^2}^2\Big),$$

l'énergie est donc finie dès lors que $(b_\varepsilon, v_\varepsilon) \in H^1 \times L^2$. Contrairement au régime de la dynamique des points vortex étudié au Chapitre 6, où l'énergie du champ Ψ_ε provenait uniquement des vortex de celui-ci, celle-ci comporte à présent un terme additionnel dû au gradient de la phase $v_\varepsilon = 2\nabla\varphi_\varepsilon$.

Notre première tâche consiste à résoudre le problème de Cauchy pour l'équation $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$ de sorte que le couple $(b_\varepsilon, v_\varepsilon)$ défini par (7.6), tant que Ψ_ε ne s'annule pas, appartienne effectivement à l'espace $C(H^{s+1} \times H^s)$. Comme nous l'avons mentionné plus haut, le champ

Ψ_ε^0 appartient $\mathcal{E}$, où $\mathcal{E}$ désigne l'espace des fonctions d'énergie finie. D'après [54] (voir aussi [55]), on a l'inclusion

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{W} + H^1(\mathbb{R}^N).$$

L'espace $\mathcal{W}$, qui sera défini à la Section 7.2 ci-après, comprend notamment toutes les fonctions constantes de module égal à un. Il est par conséquent naturel de déterminer Ψ_ε dans l'espace $C(\mathcal{W} + H^{s+1})$. La Section 7.2 contient un résultat d'existence locale et d'unicité dans cet espace.

Dans les résultats de ce chapitre, on choisit une perturbation initiale b_ε^0 assez petite en norme uniforme afin que $0 < m \leq |\Psi_\varepsilon^0| \leq M$, où m et M sont indépendantes de ε. Plus précisément, la constante $K_1(s, N)$ est ajustée de sorte que

$$c(s, N)\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\|b_\varepsilon^0\|_{H^s} < \frac{1}{2}.$$

Ici, la constante $c(s, N)$ correspond à l'inclusion de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$ pour $s > N/2$. L'estimation ci-dessus garantit donc que $\||\Psi_\varepsilon^0|^2 - 1\|_\infty < 1/2$.

Tant que $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} |\Psi_\varepsilon(t, x)| > 0$, on peut définir $(b_\varepsilon, v_\varepsilon)(t)$ de manière explicite en fonction de $\Psi_\varepsilon(t)$. Dans l'optique d'établir l'existence de $(b_\varepsilon, v_\varepsilon)$ sur l'intervalle d'existence de Ψ_ε en entier, ainsi que le fait que $\||\Psi_\varepsilon(t)|^2 - 1\|_\infty < 1/2$ à temps t positif, il suffit donc de s'assurer que la norme $\|b_\varepsilon(t)\|_{H^s}$ satisfait à l'estimation ci-dessus tant que b_ε est définie. Afin de démontrer que la solution Ψ_ε - et par conséquent aussi $(b_\varepsilon, v_\varepsilon)$ - est globale, ainsi que les Théorèmes 7.2 et 7.3, nous avons besoin d'estimations de la norme de b_ε et v_ε dans les espaces de Sobolev H^{s+1} et H^s. Ces estimations d'énergie toutefois sont délicates à obtenir, à cause notamment de la présence de dérivées d'ordre trop élevé dans les seconds membres de (7.7). De même que dans [46], on y remédiera en incorporant aux équations pour b_ε et v_ε l'équation vérifiée par la variable $\nabla \ln(\rho_\varepsilon^2)$. Plus précisément, on remplace $(b_\varepsilon, v_\varepsilon)$ par le jeu de variables $(b_\varepsilon, z_\varepsilon)$, où la nouvelle inconnue z_ε est définie par

$$z_\varepsilon = v_\varepsilon - i\nabla \ln(\rho_\varepsilon^2) = \nabla\big(2\varphi_\varepsilon - i \ln(\rho_\varepsilon^2)\big) \in \mathbb{C}^N.$$

Notons que ces variables sont adaptées à notre analyse, puisque

$$E_\varepsilon(\Psi_\varepsilon) = \frac{1}{8}\big(\|b_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|z_\varepsilon\|_{L^2((1+\varepsilon b/\sqrt{2})dx)}^2\big).$$

En outre, il existe une constante $C = C(s, N)$ telle que[38]

$$C^{-1}\|(b_\varepsilon, z_\varepsilon)\|_{H^s} \leq \|(b_\varepsilon, v_\varepsilon)\|_{H^s} + \varepsilon\|b_\varepsilon\|_{H^{s+1}} \leq C\|(b_\varepsilon, z_\varepsilon)\|_{H^s}.$$

Pour alléger les notations, on omettra désormais parfois l'indice ε ; en particulier Ψ_ε, $\rho_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, b_\varepsilon$ et v_ε deviendront Ψ, ρ, φ, b et v.

Le système d'équations vérifié par (b, z) est fourni par la proposition suivante.

Proposition 7.1. *Soient $s \geq 2$, $T_0 > 0$ et Ψ une solution de* $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$ *sur* $[0, T_0]$ *telle que*

$$\inf_{(t,x)\in[0,T_0]\times\mathbb{R}^N} |\Psi(t, x)| \geq m > 0,$$

[38] Voir (7.14) ci-après.

et telle que $(b,v)\in C^1([0,T_0],H^{s+1}\times H^s)$. *Alors*[39]

$$\begin{cases} \partial_t b+\dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\mathrm{div}\mathrm{Re}z=\kappa_\varepsilon\Big[-(\dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}+b)\mathrm{div}(\mathrm{Im}z)-\dfrac{1}{2}(\dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}+b)\mathrm{Re}\langle z,z\rangle \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -\dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}(\dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}+b)b\Big]-\mathrm{div}(b\mathrm{Re}z) \\ \\ \partial_t z+\dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\nabla b=(\kappa_\varepsilon+i)\Delta z+\dfrac{-1+\kappa_\varepsilon i}{2}\nabla\langle z,z\rangle+\kappa_\varepsilon\dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}i\nabla b. \end{cases}$$

Comme on l'espérait, le système d'équations pour (b,z) ne fait pas intervenir de dérivée d'ordre trois, grâce à l'identité

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\nabla b=-(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)\mathrm{Im}z$$

qui permet de gagner une dérivée.

Pour l'équation de Gross-Pitaevskii, obtenue avec $\kappa_\varepsilon=0$, les estimations d'énergie de [46] pour (b,z) portent sur des semi-normes faisant intervenir un poids :

$$\Gamma^k(b,z):=\int_{\mathbb{R}^N}|D^kb|^2+\int_{\mathbb{R}^N}(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)|D^kz|^2,\quad k=0,\dots,s.$$

En particulier, on a la relation remarquable

$$\Gamma^0(b,z)=8E_\varepsilon(\Psi),$$

qui était la motivation principale de l'ajout de la partie imaginaire de z. Remarquons de plus que $\Gamma^k(b,z)$ et $\|(D^kb,D^kz)\|_{L^2}^2$ sont comparables tant que $|\Psi|$ est proche de un.

Pour l'équation complexe, on se servira en partie des estimations de [46] pour établir les estimations suivantes.

Proposition 7.2. *Soient* $s>N/2$ *et* $T_0>0$. *Soit* Ψ *une solution de* $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$ *sur* $[0,T_0]$ *telle que*

$$\||\Psi|^2-1\|_{L^\infty([0,T_0]\times\mathbb{R}^N)}<\frac{1}{2}$$

et telle que $(b,z)\in C^1([0,T_0],H^{s+1})$. *Il existe une constante* K *ne dépendant que de* s *et de* N *telle que pour tous* $1\le k\le s$ *et* $t\in[0,T_0]$ *on a*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big[\Gamma^k(b,z)+E_\varepsilon(\Psi)\big]+\frac{\kappa_\varepsilon}{2}\big[\Gamma^{k+1}(b,z)+\frac{1}{\varepsilon^2}\Gamma^k(b,0)\big]\\ \le K\big(\frac{\kappa_\varepsilon}{\varepsilon}\|b\|_\infty+\kappa_\varepsilon\|(b,z)\|_\infty^2+\|(Db,Dz)\|_\infty\big)\big[\Gamma^k(b,z)+E_\varepsilon(\Psi)\big].\end{aligned}$$

On suppose désormais que $s>1+N/2$. En combinant la Proposition 7.2 et l'injection de Sobolev, on obtient immédiatement l'inégalité

$$\|(b,z)(t)\|_{H^s}\le C\|(b,z)(0)\|_{H^s}+C(\varepsilon)\int_0^t\|(b,z)(\tau)\|_{H^s}^3\,d\tau.$$

[39]On note ici $\langle z,z\rangle=\sum_{i=1}^N z_i^2$, où $z=(z_1,\dots,z_N)\in\mathbb{C}^N$.

Celle-ci fournit une première estimation de $\|(b,z)(t)\|_{H^s}$ jusqu'à des temps de l'ordre de $C(\varepsilon)^{-1}\|(b,z)(0)\|_{H^s}^{-2}$. Pourtant, puisque la constante $C(\varepsilon)$ tend vers l'infini lorsque ε tend vers zéro, il nous faut poursuivre nos efforts. En fait, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et à l'injection de Sobolev, la Proposition 7.2 procure également une estimation de $\|(b,z)\|_{L^\infty_t(H^s)}$ en fonction des quantités $\|(b,z)\|_{L^2_t(H^s)}$ et $\|b\|_{L^2_t(L^\infty)}$.

Proposition 7.3. *Supposons que les hypothèses de la Proposition 7.2 soient vérifiées et que de plus $s > 1 + N/2$. Il existe une constante K ne dépendant que de s et de N telle que pour $t \in [0, T_0]$*

$$\begin{aligned}\|(b,z)\|_{L^\infty_t(H^s)} \leq{}& K\|(b,z)(0)\|_{H^s}\\ &+ K\big[\nu_\varepsilon\|(b,z)\|_{L^2_t(H^s)}\|b\|_{L^2_t(L^\infty)} + \big(\kappa_\varepsilon\|(b,z)\|_{L^\infty_t(H^s)} + 1\big)\|(b,z)\|^2_{L^2_t(H^s)}\big]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\kappa_\varepsilon\|(Db,Dz)\|^2_{L^2_t(H^s)} \leq{}& K\|(b,z)(0)\|^2_{H^s}\\ &+ K\|(b,z)\|_{L^\infty_t(H^s)}\big[\nu_\varepsilon\|(b,z)\|_{L^2_t(H^s)}\|b\|_{L^2_t(L^\infty)} + \big(\kappa_\varepsilon\|(b,z)\|_{L^\infty_t(H^s)} + 1\big)\|(b,z)\|^2_{L^2_t(H^s)}\big].\end{aligned}$$

Dans un second temps, les propriétés de décroissance de l'opérateur de semi-groupe associé au système (7.7) nous permettront d'obtenir des estimations pour les quantités $\|(b,z)\|_{L^2_t(H^s)}$ et $\|b\|_{L^2_t(L^\infty)}$ en fonction de $\|(b,z)\|_{L^\infty_t(H^s)}$ et de clore finalement la boucle.

Proposition 7.4. *Sous les hypothèses de la Proposition 7.3, il existe une constante K ne dépendant que de s et de N telle que pour $t \in [0, T_0]$*

$$\begin{aligned}\|(b,z)\|_{L^2_t(H^s)} \leq K\big[&\kappa_\varepsilon^{1/2}X_0 + \big(1+\varepsilon\|(b,z)\|_{L^\infty_t(H^s)}\big)\|(b,z)\|_{L^2_t(H^s)}\big(\kappa_\varepsilon^{1/2}\|(b,z)\|_{L^2_t(H^s)}\\ &+(\varepsilon+\nu_\varepsilon^{-1})\|(b,z)\|_{L^\infty_t(H^s)}\big)\big]\end{aligned}$$

et

$$\|b\|_{L^2_t(L^\infty)} \leq K\big[(\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1})^{1/2}X_0 + \varepsilon\|(b,z)\|_{L^\infty_t(H^s)}\|(b,z)\|_{L^2_t(H^s)}\big(1+\varepsilon\|(b,z)\|_{L^\infty_t(H^s)}\big)\big],$$

où X_0 est défini au Théorème 7.1.

La combinaison des deux propositions précédentes mène à une estimation pour $\|(b,z)\|_{L^\infty_t(H^s)}$, de laquelle résultent finalement les Théorèmes 7.1, 7.2 et 7.3.

La suite de ce chapitre est organisée de la façon suivante. La Section 7.2 est dévolue à l'étude du problème de Cauchy pour $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$ et à l'existence et l'unicité locale de (b,z). Les Propositions 7.1, 7.2 et 7.3 sont ensuite démontrées à la Section 7.3. À la Section 7.4, la Proposition 7.4 est établie par analyse de Fourier. Les Théorèmes 7.1 et 7.3 sont finalement prouvés à la Section 7.5. Nous omettrons la démonstration du Théorème 7.2, qui s'obtient à partir de celle du Théorème 7.3 au moyen de quelques modifications.

7.2 Le problème de Cauchy pour $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$.

Dans cette section, on étudie le problème de Cauchy pour $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$ dans un espace comprenant les champs de la forme $\Psi = (1+a)^{1/2}\exp(i\varphi)$, où $(a,\varphi) \in H^{s+1}(\mathbb{R}^N) \times H^{s+1}(\mathbb{R}^N)$ et $s \geq 1$. On considère l'ensemble

$$\mathcal{W} = \{u \in L^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \nabla u \in H^\infty(\mathbb{R}^N), \quad 1 - |u|^2 \in L^2(\mathbb{R}^N)\}.$$

Le théorème suivant est un résultat d'existence locale et d'unicité lorsque $\Psi(0) \in \mathcal{W}+H^{s+1}$. Il s'obtient au moyen d'une méthode de point fixe classique, très analogue à celle utilisée dans la preuve du Théorème 5.5 du Chapitre 5, la démonstration ne figure donc pas ici.

Théorème 7.4. *Soient $s+1 > N/2$ et $U_0 \in \mathcal{W}$. Pour tout $\omega_0 \in H^{s+1}(\mathbb{R}^N)$, il existe $T^* = T(U_0, \omega_0) > 0$ et une unique solution maximale*

$$\Psi \in \{U_0\} + C([0,T^*), H^{s+1}(\mathbb{R}^N))$$

à l'équation $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$ *vérifiant $\Psi(0) = U_0 + \omega_0$.*

L'énergie de Ginzburg-Landau de Ψ est finie et vérifie

$$E_\varepsilon(\Psi(t)) \leq E_\varepsilon(\Psi(0)), \quad \forall t \in [0,T^*).$$

De plus, il existe une constante C ne dépendant que de $E_\varepsilon(\Psi_0)$ telle que

$$\|\Psi(t) - \Psi(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C\exp(Ct), \quad \forall t \in [0,T^*).$$

Enfin, ou bien $T^* = +\infty$, ou bien $\limsup_{t\to T^*} \|\nabla\Psi(t)\|_{H^s} = +\infty$.

D'après l'inclusion

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{W} + H^1(\mathbb{R}^N),$$

établie dans [54], une conséquence directe de ce résultat est le

Corollaire 7.1. *Soit $s+1 > N/2$. Soit $(a^0, \varphi^0) \in H^{s+1}(\mathbb{R}^N) \times H^{s+1}(\mathbb{R}^N)$ vérifiant l'estimation*

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\|a^0\|_\infty < 1.$$

Il existe $T_0 > 0$ et une solution $(b,v) \in C([0,T_0], H^{s+1} \times H^s)$ de (7.7) *avec donnée initiale $(a^0, u^0 = 2\nabla\varphi^0)$, unique sur $[0,T_0]$. Il existe en outre une fonction $\varphi \in C([0,T_0), L^2_{loc})$ telle que $v = 2\nabla\varphi$.*

Démonstration. Soit

$$\Psi^0(x) = \big(1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}a^0(x)\big)^{1/2}\exp(i\varphi^0(x)).$$

Les hypothèses sur a^0 et φ^0 entraînent que Ψ^0 appartient à $\mathcal{E}$ et vérifie de plus

$$\||\Psi^0|^2 - 1\|_\infty < 1. \tag{7.9}$$

Comme $\mathcal{E} \subset \mathcal{W}+H^1(\mathbb{R}^N)$, on a $\Psi^0 \in \{U_0\}+H^1(\mathbb{R}^N)$ pour un champ $U_0 \in \mathcal{W}$. En utilisant le fait que $H^{s+1}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$, on vérifie que

$$\|\nabla\Psi^0\|_{H^s} \leq C(1 + \|(a^0,u^0)\|^2_{H^{s+1}\times H^s}),$$

par conséquent on a en fait $\Psi^0 \in \{U_0\} + H^{s+1}(\mathbb{R}^N)$. En vertu du Théorème 7.4, il existe donc $T^* > 0$ et une unique solution $\Psi \in \{U_0\} + C([0,T^*), H^{s+1})$ de $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$ telle que $\Psi(0) = \Psi^0$.

D'après l'hypothèse (7.9) et l'inclusion $H^{s+1}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$, il existe par continuité un intervalle $[0,T_0] \subset [0,T^*)$ tel que

$$\inf_{(t,x)\in[0,T_0]\times\mathbb{R}^N} |\Psi(t,x)| \geq m > 0.$$

On peut donc trouver un relèvement (localement en espace) de Ψ sur $[0,T_0]$:

$$\Psi(t,x) = \big(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b(t,x)\big)^{1/2}\exp(i\varphi(t,x)), \quad \varphi \in L^2_{\mathrm{loc}}.$$

Posons $v = 2\nabla\varphi$, b et v sont alors déterminés de manière unique par les identités

$$b = \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}(|\Psi|^2-1), \quad v = \frac{2}{|\Psi|^2}(\Psi\times\nabla\Psi).$$

De par la régularité de Ψ, on a bien $(b,v)\in C([0,T_0],H^{s+1}(\mathbb{R}^N)\times H^s(\mathbb{R}^N))$. De plus (b,v) est solution de (7.7) sur $[0,T_0]$. □

7.3 Démonstration des Propositions 7.1, 7.2 et 7.3.

7.3.1 Notations.

En premier lieu, on introduit les notations suivantes : $a\cdot b$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^N$ ou $\mathbb{R}^{2N}$. Pour des vecteurs complexes, on étend cette définition en posant

$$z\cdot\zeta = (\mathrm{Re} z,\mathrm{Im} z)\cdot(\mathrm{Re}\zeta,\mathrm{Im}\zeta)\in\mathbb{R}, \quad \forall z,\zeta\in\mathbb{C}^N.$$

Par ailleurs, on définit le produit complexe de $z=(z_1,\dots,z_N)$ et $\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_N)\in\mathbb{C}^N$ par

$$\langle z,\zeta\rangle = \sum_{j=1}^N z_j\zeta_j \in\mathbb{C}.$$

Pour $z=a+ib\in\mathbb{C}^N$ et $\zeta=x+iy\in\mathbb{C}^N$, avec $a,b,x,y\in\mathbb{R}^N$, on a donc

$$\langle z,\zeta\rangle = a\cdot x - b\cdot y + i(a\cdot y+b\cdot x) \quad \text{et} \quad z\cdot\zeta = a\cdot x+b\cdot y.$$

Enfin, pour $A,B\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, on introduit $A:B=\mathrm{tr}(A^tB)$. Avec les mêmes notations que ci-dessus, on pose

$$\nabla z = \nabla a + i\nabla b\in\mathbb{C}^{N\times N},$$

et finalement

$$\nabla z:\nabla\zeta = \nabla a:\nabla x+\nabla b:\nabla y.$$

7.3.2 Démonstration de la Proposition 7.1.

Comme $\Psi=\rho\exp(i\varphi)$ est solution de $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$, les variables ρ et φ satisfont au système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial_t\rho^2}{\rho^2} = 2\kappa_\varepsilon\left[\dfrac{\Delta\rho}{\rho}-\dfrac{|v|^2}{4}+\dfrac{1-\rho^2}{\varepsilon^2}\right]-\dfrac{\mathrm{div}\,\rho^2v}{\rho^2}\\ \partial_t(2\varphi) = 2\left[\dfrac{\Delta\rho}{\rho}-\dfrac{|v|^2}{4}+\dfrac{1-\rho^2}{\varepsilon^2}\right]+\kappa_\varepsilon\dfrac{\mathrm{div}\,\rho^2v}{\rho^2}, \end{cases}$$

où $v=2\nabla\varphi$.

En considérant le gradient de chaque équation, on obtient

$$\begin{cases} \nabla\dfrac{\partial_t\rho^2}{\rho^2} = 2\kappa_\varepsilon\nabla\dfrac{\Delta\rho}{\rho}-\kappa_\varepsilon\nabla\dfrac{|v|^2}{2}+2\kappa_\varepsilon\nabla\dfrac{1-\rho^2}{\varepsilon^2}-\nabla\dfrac{\mathrm{div}\,\rho^2v}{\rho^2}\\ \partial_tv = 2\nabla\dfrac{\Delta\rho}{\rho}-\nabla\dfrac{|v|^2}{2}+2\nabla\dfrac{1-\rho^2}{\varepsilon^2}+\kappa_\varepsilon\nabla\dfrac{\mathrm{div}\,\rho^2v}{\rho^2}. \end{cases}$$

Souvenons-nous que $z = v - i\nabla \ln(\rho^2)$, par conséquent

$$\begin{aligned}\partial_t z &= \partial_t v - i\nabla \frac{\partial_t \rho^2}{\rho^2} \\ &= (1-\kappa_\varepsilon i) 2\nabla \frac{\Delta\rho}{\rho} - (1-\kappa_\varepsilon i)\nabla \frac{|v|^2}{2} + 2(1-\kappa_\varepsilon i)\nabla \frac{1-\rho^2}{\varepsilon^2} + (\kappa_\varepsilon + i)\nabla \frac{\operatorname{div} \rho^2 v}{\rho^2}.\end{aligned}$$

D'autre part, grâce à l'identité

$$\Delta \ln \rho = \frac{\Delta\rho}{\rho} - \frac{|\nabla\rho|^2}{\rho^2},$$

on obtient

$$\begin{aligned}2\frac{\Delta\rho}{\rho} &= 2\Delta \ln\rho + 2\Big|\frac{\nabla\rho}{\rho}\Big|^2 = \Delta \ln \rho^2 + 2|\nabla \ln \rho|^2 \\ &= \Delta \ln\rho^2 + \frac{1}{2}|\nabla \ln \rho^2|^2 \\ &= \Delta \ln \rho^2 + \frac{1}{2}|\mathrm{Im} z|^2.\end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque v est un gradient, on a

$$\nabla \frac{\operatorname{div}(\rho^2 v)}{\rho^2} = \nabla \operatorname{div} v + \nabla\Big(v \cdot \frac{\nabla\rho^2}{\rho^2}\Big) = \Delta v - \nabla\Big(\mathrm{Im} z \cdot v\Big).$$

Enfin, en utilisant le fait que

$$2\nabla \frac{1-\rho^2}{\varepsilon^2} = -\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\nabla b,$$

on parvient à une première équation pour z :

$$\partial_t z = (\kappa_\varepsilon + i)\Delta z - \frac{1-\kappa_\varepsilon i}{2}\nabla\langle z, z\rangle - \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}(1-\kappa_\varepsilon i)\nabla b.$$

Passons ensuite à l'équation pour b. Rappelons que ρ^2 satisfait à

$$\partial_t \rho^2 = \kappa_\varepsilon \left[2\rho\Delta\rho - \rho^2 \frac{|v|^2}{2} + 2\frac{\rho^2(1-\rho^2)}{\varepsilon^2}\right] - \operatorname{div}(\rho^2 v).$$

En développant l'expression

$$2\rho\Delta\rho = \rho^2 \Delta \ln \rho^2 + \frac{\rho^2}{2}|\mathrm{Im} z|^2 = -\rho^2 \operatorname{div} \mathrm{Im} z + \frac{\rho^2}{2}|\mathrm{Im} z|^2,$$

on trouve

$$\begin{aligned}\partial_t \rho^2 = \kappa_\varepsilon \Big[&-(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)\operatorname{div} \mathrm{Im} z - \frac{1}{2}(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)\mathrm{Re}\langle z, z\rangle - 2\frac{(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}{\varepsilon^2}b\Big] \\ &- \operatorname{div}\big((1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)\mathrm{Re} z\big),\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

7.3.3 Démonstration de la Proposition 7.2.

On expose à présent la démonstration de la Proposition 7.2, au cours de laquelle on utilisera notamment l'identité

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\nabla b = -(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)\mathrm{Im} z. \tag{7.10}$$

Dans ce paragraphe, C désignera une constante ne dépendant que de s et de N qui pourra éventuellement varier d'une ligne à l'autre.

Dans le but d'utiliser les estimations déjà établies dans [46] pour l'équation de Gross-Pitaevskii, on récrit les équations pour (b, z) sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t b = \kappa_\varepsilon f_{\mathrm{d}}(b,z) + f_{\mathrm{s}}(b,z) \\ \partial_t z = \kappa_\varepsilon g_{\mathrm{d}}(b,z) + g_{\mathrm{s}}(b,z), \end{cases}$$

où on a introduit la partie dissipative

$$\begin{cases} f_{\mathrm{d}}(b,z) = -(\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}+b)\mathrm{div}\,(\mathrm{Im} z) - \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}+b)\mathrm{Re}\langle z,z\rangle - \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}(\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}+b)b, \\ g_{\mathrm{d}}(b,z) = \Delta z + \frac{i}{2}\nabla\langle z,z\rangle + i\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\nabla b \end{cases}$$

et la partie dispersive

$$\begin{cases} f_{\mathrm{s}}(b,z) = -\mathrm{div}\,\big((\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}+b)\mathrm{Re} z\big), \\ g_{\mathrm{s}}(b,z) = i\Delta z - \frac{1}{2}\nabla\langle z,z\rangle - \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\nabla b. \end{cases}$$

Ensuite, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Gamma^k(b,z) &= \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N}(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)D^k z\cdot D^k z + D^k b\cdot D^k b \\ &= 2\int_{\mathbb{R}^N}(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)D^k z\cdot D^k\partial_t z + D^k b\cdot D^k\partial_t b + \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\varepsilon\partial_t b}{\sqrt{2}}D^k z\cdot D^k z \\ &= I_{\mathrm{s}} + I_{\mathrm{d}}, \end{aligned}$$

où

$$I_{\mathrm{s}} = 2\int_{\mathbb{R}^N}(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)D^k z\cdot D^k g_{\mathrm{s}} + D^k b\cdot D^k f_{\mathrm{s}} + \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\varepsilon f_{\mathrm{s}}}{\sqrt{2}}D^k z\cdot D^k z$$

et

$$\kappa_\varepsilon^{-1} I_{\mathrm{d}} = 2\int_{\mathbb{R}^N}(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)D^k z\cdot D^k g_{\mathrm{d}} + D^k b\cdot D^k f_{\mathrm{d}} + \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\varepsilon f_{\mathrm{d}}}{\sqrt{2}}D^k z\cdot D^k z.$$

Pour estimer le premier terme I_{s}, il suffit d'invoquer les calculs conduisant à la Proposition 1 de [46] :

$$|I_{\mathrm{s}}| \le C(1+\varepsilon\|b\|_\infty)\|(Db,Dz)\|_{L^\infty}\Big(\Gamma^k(b,z) + E_\varepsilon(\Psi_\varepsilon)\Big).$$

On cherche ensuite une estimation pour le terme I_{d}. En insérant les expressions définissant f_{d} et g_{d}, on obtient

$$I_{\mathrm{d}} = \kappa_\varepsilon(2I + 2J + K),$$

où

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^N} (1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)\Big(D^k z\cdot D^k\Delta z + \frac{1}{2}D^k z\cdot iD^k\nabla\langle z,z\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}D^k z\cdot iD^k\nabla b\Big)\\ &= I_1+I_2+I_3,\\ J &= \int_{\mathbb{R}^N} -D^k b\, D^k\Big((\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}+b)\mathrm{div}\,(\mathrm{Im} z)\Big) - \frac{1}{2}D^k b\, D^k\Big((\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}+b)\mathrm{Re}\langle z,z\rangle\Big)\\ &\qquad - D^k b\, D^k\Big(\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}(\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}+b)b\Big)\\ &= J_1+J_2+J_3, \end{aligned}$$

et

$$K = -\int_{\mathbb{R}^N} (1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)\Big(\mathrm{div}\,(\mathrm{Im} z) + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\langle z,z\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}b\Big)D^k z\cdot D^k z.$$

Première étape : estimation pour I_1.
En intégrant par parties dans I_1, puis en insérant la relation (7.10), on trouve

$$\begin{aligned} I_1 &= -\int_{\mathbb{R}^N} (1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)\nabla D^k z : \nabla D^k z - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\nabla b\cdot(D^k z\cdot\nabla D^k z)\\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} (1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)|\nabla D^k z|^2 + \int_{\mathbb{R}^N}(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)\mathrm{Im} z\cdot(D^k z\cdot\nabla D^k z)\\ &\le -\int_{\mathbb{R}^N} (1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)|\nabla D^k z|^2 + \int_{\mathbb{R}^N}(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)^{\frac{1}{2}}|\mathrm{Im} z||D^k z|(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)^{\frac{1}{2}}|\nabla D^k z|. \end{aligned}$$

Au deuxième terme du membre de droite, on applique l'inégalité de Young :

$$2|ab| \le a^2+b^2, \quad \forall a,b,$$

et on trouve

$$I_1 \le -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)|\nabla D^k z|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)|\mathrm{Im} z|^2|D^k z|^2,$$

soit finalement

$$I_1 \le -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)|\nabla D^k z|^2 + C(1+\varepsilon\|b\|_\infty)\|\mathrm{Im} z\|_\infty^2\|z\|_{H^k}^2.$$

Deuxième étape : estimation pour I_2.
En développant l'intégrande de I_2 à l'aide de la formule de Leibniz, on obtient

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathbb{R}^N}(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)D^k z\cdot D^k(i\langle z,\nabla z\rangle)\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)D^k z\cdot i\langle z,\nabla D^k z\rangle + \sum_{j=0}^{k-1}C_k^j\int_{\mathbb{R}^N}(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)D^k z\cdot i\langle D^{k-j}z, D^j(\nabla z)\rangle, \end{aligned}$$

d'où, en utilisant l'inégalité de Young dans le premier terme du membre de droite,

$$\begin{aligned} I_2 &\le \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)|\nabla D^k z|^2 + C(1+\varepsilon\|b\|_\infty)\|z\|_\infty^2\|z\|_{H^k}^2\\ &\qquad + C\sum_{j=0}^{k-1}\Big|\int_{\mathbb{R}^N}(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)D^k z\cdot i\langle D^{k-j}z, D^j(\nabla z)\rangle\Big|. \end{aligned}$$

Ensuite, pour chaque $0 \leq j \leq k-1$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis celle de Gagliardo-Nirenberg (voir le Lemme 7.9 situé en annexe) donnent

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b) D^k z \cdot i\langle D^{k-j} z, D^j(\nabla z)\rangle \Big| \leq C(1 + \varepsilon\|b\|_\infty)\|D^k z\|_{L^2} \||D^{k-j} z||D^j(\nabla z)|\|_{L^2}$$
$$\leq C(1 + \varepsilon\|b\|_\infty)\|D^k z\|_{L^2}\|Dz\|_\infty\|z\|_{H^k}.$$

On parvient donc à

$$I_2 \leq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} (1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b)|\nabla D^k z|^2 + C(1 + \varepsilon\|b\|_\infty)(\|z\|_\infty^2 + \|Dz\|_\infty)\|z\|_{H^k}^2.$$

Troisième étape : estimation pour I_3.
Comme $D^k\nabla b \in \mathbb{R}^N$, on a par définition du produit complexe

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b)\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} D^k z \cdot iD^k\nabla b = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b)\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} D^k\mathrm{Im}z \cdot D^k\nabla b.$$

Ceci nous donne d'après (7.10), puis d'après la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{2}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^N} (1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b) D^k\mathrm{Im}z \cdot D^k\big((1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b)\mathrm{Im}z\big) \\ &= -\frac{2}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^N} (1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b)^2|D^k\mathrm{Im}z|^2 - \frac{2}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{k} C_k^j \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b) D^k\mathrm{Im}z \cdot \big(D^j(1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b) D^{k-j}\mathrm{Im}z\big). \end{aligned}$$

Ensuite, on observe que pour chaque $j \geq 1$, la relation

$$D^j(1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} D^j b$$

permet de gagner un facteur ε. Par conséquent, en appliquant l'inégalité de Young à chaque terme de la somme, on trouve

$$I_3 \leq -\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^N} (1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} b)^2|D^k\mathrm{Im}z|^2 + C\sum_{j=1}^{k}\int_{\mathbb{R}^N} |D^j b\, D^{k-j}\mathrm{Im}z|^2,$$

et on déduit finalement de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (voir le Lemme 7.9 en annexe) que

$$I_3 \leq C\left(\|b\|_\infty^2 + \|\mathrm{Im}z\|_\infty^2\right)\|(b, z)\|_{H^k}^2.$$

Quatrième étape : estimation pour J_1.
Par un calcul rapide s'appuyant sur (7.10), on obtient

$$\begin{aligned} J_1 &= -\int_{\mathbb{R}^N} D^k b\, D^k\Big((\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} + b)\mathrm{div}\,(\mathrm{Im}z)\Big) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} D^k b\, D^k\mathrm{div}\,\Big((\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} + b)\mathrm{Im}z\Big) + \int_{\mathbb{R}^N} D^k b\, D^k(\nabla b \cdot \mathrm{Im}\ z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} D^k b\, D^k\mathrm{div}\,(\nabla b) + \int_{\mathbb{R}^N} D^k b\, D^k(\nabla b \cdot \mathrm{Im}\ z). \end{aligned}$$

Une intégration par parties dans le premier terme du membre de droite, ainsi qu'une nouvelle utilisation de la formule de Leibniz dans le second terme, nous donnent

$$J_1 = -\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla D^k b|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} D^k b\,(D^k \nabla b)\cdot \mathrm{Im} z + \sum_{j=1}^{k} C_k^j \int_{\mathbb{R}^N} D^k b\,(D^{k-j}\nabla b)\cdot D^j \mathrm{Im} z.$$

En combinant les inégalités de Young, Cauchy-Schwarz et Gagliardo-Nirenberg, on obtient alors

$$J_1 \leq -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla D^k b|^2 + C\|\mathrm{Im} z\|_\infty^2 \|b\|_{H^k}^2 + C\|b\|_{H^k}\left(\|\nabla b\|_\infty + \|Dz\|_\infty\right)\|(b,z)\|_{H^k},$$

d'où finalement

$$J_1 \leq -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla D^k b|^2 + C\left(\|\mathrm{Im} z\|_\infty^2 + \|(\nabla b, Dz)\|_\infty\right)\|(b,z)\|_{H^k}^2.$$

Cinquième étape : estimation pour J_2.
De même, on calcule à l'aide de la formule de Leibniz

$$\begin{aligned}
J_2 &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} D^k b\, D^k\Big((\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} + b)\mathrm{Re}\langle z, z\rangle\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} D^k b(\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} + b) D^k\left(\mathrm{Re}\langle z, z\rangle\right) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} C_k^j \int_{\mathbb{R}^N} D^k b\, D^j b D^{k-j}\left(\mathrm{Re}\langle z, z\rangle\right) \\
&= -\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}}\int_{\mathbb{R}^N} D^k b\, D^k\left(\mathrm{Re}\langle z, z\rangle\right) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} b D^k b D^k\left(\mathrm{Re}\langle z, z\rangle\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} C_k^j \int_{\mathbb{R}^N} D^k b\, D^j b D^{k-j}(\mathrm{Re}\langle z, z\rangle).
\end{aligned}$$

En invoquant les inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$J_2 \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^N} |D^k b|^2 + C\big(\|\langle z, z\rangle\|_{H^k}^2 + \|b\|_{H^k}^2\|\langle z, z\rangle\|_{H^k} + \|b\|_{H^k}\sum_{j=1}^{k}\|D^j b D^{k-j}\langle z, z\rangle\|_{L^2}\big),$$

de sorte que d'après le Lemme 7.9 on parvient à l'inégalité

$$J_2 \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^N} |D^k b|^2 + C\|(b,z)\|_\infty^2\|(b,z)\|_{H^k}^2.$$

Sixième étape : estimation pour J_3.
On a

$$\begin{aligned}
J_3 &= -\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^N} D^k b\, D^k\Big(b(\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} + b)\Big) \\
&= -\frac{2}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^N} |D^k b|^2 - \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^N} D^k b D^k(b^2),
\end{aligned}$$

d'où, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$J_3 \leq -\frac{2}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^N} |D^k b|^2 + \frac{C}{\varepsilon}\|b\|_\infty \|b\|_{H^k}^2.$$

Septième étape : estimation pour K.
On obtient sans peine

$$|K| \leq C(1+\varepsilon\|b\|_\infty)\Big(\frac{\|b\|_\infty}{\varepsilon} + \|Dz\|_\infty + \|z\|_\infty^2\Big)\|z\|_{H^k}^2.$$

En rassemblant les étapes précédentes, on est conduit à

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Gamma^k(b,z) + \frac{\kappa_\varepsilon}{2}\Gamma^{k+1}(b,z) + \frac{2\kappa_\varepsilon}{\varepsilon^2}\Gamma^k(b,0)\\ &\quad\leq C(1+\varepsilon\|b\|_\infty)\Big[\kappa_\varepsilon\big(\|(b,z)\|_\infty^2 + \varepsilon^{-1}\|b\|_\infty\big) + \|(\nabla b, Dz)\|_\infty\Big]\|(b,z)\|_{H^k}^2,\end{aligned}$$

inégalité valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On vérifie aisément, en suivant ligne à ligne les calculs précédents, que l'inégalité ci-dessus a lieu également lorsque $k = 0$. Enfin, on a par hypothèse

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{\varepsilon b}{\sqrt{2}} \leq \frac{3}{2} \text{ sur } [0,T_0]\times\mathbb{R}^N,$$

d'où le fait que $\|(b,z)\|_{H^k}^2 \leq C\Gamma^k(b,z)$ pour tout $0 \leq k \leq s$. Ceci achève la preuve de la Proposition 7.2. □

7.3.4 Démonstration de la Proposition 7.3.

Afin de démontrer la première inégalité, on additionne les inégalités établies à la Proposition 7.2 pour k variant de 1 à s. Puisque $1/2 \leq 1 + \varepsilon b/\sqrt{2} \leq 3/2$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|(b,z)\|_{H^s}^2 &\leq C(\nu_\varepsilon\|b\|_\infty + \kappa_\varepsilon\|(b,z)\|_\infty^2 + \|(Db,Dz)\|_\infty)\|(b,z)\|_{H^s}^2\\ &\leq C\big(\nu_\varepsilon\|b\|_\infty + (\kappa_\varepsilon\|(b,z)\|_{H^s}+1)\|(b,z)\|_{H^s}\big)\|(b,z)\|_{H^s}^2.\end{aligned}$$

Après intégration sur $[0,T]$ et utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ceci conduit à

$$\begin{aligned}\|(b,z)(T)\|_{H^s}^2 \leq&\|(b,z)(0)\|_{H^s}^2\\ &+C\|(b,z)\|_{L_T^\infty(H^s)}\big(\nu_\varepsilon\|b\|_{L_T^2(L^\infty)}\|(b,z)\|_{L_T^2(H^s)} + (\kappa_\varepsilon\|(b,z)\|_{L_T^\infty(H^s)}+1)\|(b,z)\|_{L_T^2(H^s)}^2\big),\end{aligned}$$

pour tout $T \in [0,T_0]$. En considérant le supremum pour $T \in [0,t]$ puis en appliquant l'inégalité de Young au membre de droite on trouve le résultat attendu.

La seconde inégalité de la proposition est quant à elle obtenue par intégration sur $[0,t]$ et utilisation d'inégalités de Sobolev et de Cauchy-Schwarz. □

7.4 Démonstration de la Proposition 7.4.

L'objectif de cette section est d'établir la Proposition 7.4. Ici à nouveau, C désignera une constante ne dépendant que de s et de N.

Dans un premier temps, on reformule le système (7.7)-(7.8) avec des seconds membres ne faisant intervenir que les variables b et z. On a d'une part

$$2\frac{\Delta\rho}{\rho} = \Delta\ln(\rho^2) + \frac{1}{2}|\nabla\ln(\rho^2)|^2,$$

et par ailleurs $\nabla\rho^2 = \rho^2\nabla\ln(\rho^2)$, d'où

$$\Delta\rho^2 = \mathrm{div}\,(\rho^2\nabla\ln(\rho^2)) = \mathrm{div}\,\big((\rho^2-1)\nabla\ln(\rho^2)\big) + \Delta\ln(\rho^2).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}2\nabla\Big(\frac{\Delta\rho}{\rho}\Big) - v\cdot\nabla v &= \nabla\big[\Delta\rho^2 - \mathrm{div}\,\big((\rho^2-1)\nabla\ln\rho^2\big) + \frac{1}{2}|\nabla\ln\rho^2|^2 - \frac{1}{2}|v|^2\big]\\ &= \nabla\big[\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\Delta b + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\mathrm{div}\,(b\mathrm{Im}z) + \frac{1}{2}|\mathrm{Im}z|^2 - \frac{1}{2}|v|^2\big].\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$-2|\nabla\rho|^2 - \rho^2\frac{|v|^2}{2} = -\frac{\rho^2}{2}\big(|\nabla\ln\rho^2|^2 + |v|^2\big) = -\frac{\rho^2}{2}|z|^2.$$

Ainsi, (b,v) est solution du système d'équations

$$\begin{cases}\partial_t b + \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\mathrm{div}\,v + \dfrac{2\kappa_\varepsilon}{\varepsilon^2}b - \kappa_\varepsilon\Delta b = f(b,z)\\ \partial_t v + \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\nabla b - \kappa_\varepsilon\Delta v - \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\nabla\Delta b = g(b,z),\end{cases} \tag{7.11}$$

où $f=\tilde{f}$ et $g=\tilde{g}-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\nabla\Delta b$ sont définis par

$$\begin{cases}f(b,z) = \dfrac{\kappa_\varepsilon}{\varepsilon}\Big[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)|z|^2 - \sqrt{2}b^2\Big] - \mathrm{div}\,(b\mathrm{Re}z)\\ g(b,z) = -\kappa_\varepsilon\nabla(\mathrm{Re}z\cdot\mathrm{Im}z) + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\nabla\mathrm{div}\,(b\mathrm{Im}z) - \dfrac{1}{2}\nabla\mathrm{Re}\langle z,z\rangle.\end{cases} \tag{7.12}$$

7.4.1 Quelques notations et résultats préliminaires.

De même que dans [46], on introduit les nouvelles fonctions

$$c = (1-\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta)^{\frac{1}{2}}b, \quad d = (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{div}\,v,$$

ainsi que

$$F = (1-\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta)^{\frac{1}{2}}f, \quad G = (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{div}\,g.$$

Soulignons ici que puisque v est un gradient, on peut explicitement déduire v de d. Ce changement de variables transforme (7.11) en

$$\begin{cases} \partial_t c + \frac{2\kappa_\varepsilon}{\varepsilon^2}c - \kappa_\varepsilon \Delta c + \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta)^{\frac{1}{2}} d = F \\ \partial_t d - \kappa_\varepsilon \Delta d - \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta)^{\frac{1}{2}} c = G. \end{cases} \tag{7.13}$$

Dans la suite, on note $\xi \in \mathbb{R}^N$ la variable de Fourier, $\hat{f}$ la transformée de Fourier et $\mathcal{F}^{-1}(f)$ la transformée de Fourier inverse de f.

La définition de (c, d) amène à introduire la frontière en fréquence $|\xi| \sim \varepsilon^{-1}$. Plus précisément, soient $R > 0$ fixé et χ la fonction caractéristique de $B(0, R)$. Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, on définit les parties

$$f_l = \mathcal{F}^{-1}\big(\chi(\varepsilon\xi)\hat{f}\big) \quad \text{et} \quad f_h = \mathcal{F}^{-1}\big((1 - \chi(\varepsilon\xi))\hat{f}\big)$$

des basses et hautes fréquences de f respectivement, de sorte que $\widehat{f_l}$ et $\widehat{f_h}$ sont à support inclus dans $\{|\xi| \leq R\varepsilon^{-1}\}$ et $\{|\xi| \geq R\varepsilon^{-1}\}$ respectivement.

Lemme 7.1. *Il existe une constante $C = C(s, N, R) > 0$ pour laquelle, pour tout $0 \leq m \leq s + 1$, ont lieu les relations suivantes. D'une part,*

$$\|g\|_{H^m} \approx \|G\|_{H^m}, \quad \|f_l\|_{H^m} \approx \|F_l\|_{H^m} \quad \textit{et} \quad \|(\varepsilon\nabla f)_h\|_{H^m} \approx \|F_h\|_{H^m}.$$

D'autre part,

$$\|v\|_{H^m} \approx \|d\|_{H^m}, \quad \|b_l\|_{H^m} \approx \|c_l\|_{H^m} \quad \textit{et} \quad \|(\varepsilon\nabla b)_h\|_{H^m} \approx \|c_h\|_{H^m}.$$

En outre, on a

$$\|(b, z)\|_{H^m} \approx \|(b, v)_l\|_{H^m} + \|(\varepsilon\nabla b, v)_h\|_{H^m}.$$

Ici on a posé, pour $f_1, f_2 \in H^m$,

$$\|f_1\|_{H^m} \approx \|f_2\|_{H^m} \ \textit{si et seulement si} \quad C^{-1}\|f_1\|_{H^m} \leq \|f_2\|_{H^m} \leq C\|f_1\|_{H^m}.$$

Démonstration. Pour les deux premières relations, il suffit de considérer les transformées de Fourier des fonctions et d'utiliser leurs propriétés de support. La dernière relation est quant à elle établie au Lemme 1 de [46]. □

Le Lemme 7.1 nous assure que pour tout $0 \leq m \leq s$,

$$\|(b, v)\|_{H^m} + \varepsilon\|b\|_{H^{m+1}} \approx \|(b, z)\|_{H^m} \quad \text{et} \quad \|(b, z)\|_{H^m} \approx \|(c, d)\|_{H^m}, \tag{7.14}$$

dont il découle en particulier que $\|(c, d)(0)\|_{H^s} \leq CX_0$, où X_0 est défini au Théorème 7.1. Par ailleurs, lorsque $s - 1 > \frac{N}{2}$, on a par injection de Sobolev

$$\|b_l\|_{L^2_T(L^\infty)} \leq C\|b_l\|_{L^2_T(H^{s-1})} \leq C\|c_l\|_{L^2_T(H^{s-1})}$$

et d'autre part

$$\|b_h\|_{L^2_T(L^\infty)} \leq C\|b_h\|_{L^2_T(H^{s-1})} \leq C\|(\varepsilon\nabla b)_h\|_{L^2_T(H^{s-1})} \leq C\|c_h\|_{L^2_T(H^{s-1})}.$$

Il suffira donc d'établir le premier volet de la Proposition 7.4 pour $\|(c,d)\|_{L^2_T(H^s)}$ et le second pour $\|c\|_{L^2_T(H^{s-1})}$.

Dans l'espace des fréquences, le système (7.13) devient

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{pmatrix} + M(\xi)\begin{pmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{F}\\ \hat{G}\end{pmatrix},$$

où M est la matrice

$$M(\xi) = \frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}\begin{pmatrix} 2+\varepsilon^2|\xi|^2 & \dfrac{|\xi|}{\nu_\varepsilon}(2+\varepsilon^2|\xi|^2)^{\frac12} \\ -\dfrac{|\xi|}{\nu_\varepsilon}(2+\varepsilon^2|\xi|^2)^{\frac12} & \varepsilon^2|\xi|^2 \end{pmatrix}.$$

La formule de Duhamel fournit la représentation

$$\widehat{(c,d)}(t,\xi) = e^{-tM(\xi)}\widehat{(c,d)}(0,\xi) + \int_0^t e^{-(t-\tau)M(\xi)}\widehat{(F,G)}(\tau,\xi)\,d\tau.$$

Le résultat suivant, qui sera démontré en annexe de ce chapitre, établit des estimations ponctuelles pour $e^{-tM(\xi)}$.

Lemme 7.2. *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et r, c et C strictement positifs tels que pour $(a,b)\in\mathbb{C}^2$, on a pour $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ et $t\in\mathbb{R}_+$*

1. Si $|\xi|\le r\nu_\varepsilon$ alors

$$\big|e^{-tM(\xi)}(a,b)\big| \le C\exp(-\nu_\varepsilon\varepsilon|\xi|^2 t)\Big[\exp(-\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}t)\big(|a|+|b|\big)+\exp(-\frac{c|\xi|^2}{\nu_\varepsilon\varepsilon}t)\big(\nu_\varepsilon^{-1}|\xi||a|+|b|\big)\Big].$$

2. Si $|\xi|\ge r\nu_\varepsilon$ alors

$$\big|e^{-tM(\xi)}(a,b)\big| \le C\exp\big(-\frac{\nu_\varepsilon(1+\varepsilon^2|\xi|^2)}{2\varepsilon}t\big)\big(|a|+|b|\big).$$

Ici pour $A=(a,b)\in\mathbb{C}^2$, on a posé $|A| = |a|+|b|$.

Le Lemme 7.2 met en évidence la nouvelle frontière en fréquence $|\xi|\sim\nu_\varepsilon$. On peut choisir $R>r$, de sorte que $r\nu_\varepsilon < R\varepsilon^{-1}$. On est ainsi amené à scinder l'espace des fréquences en trois régions :

$$\mathbb{R}^N = \mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2\cup\mathcal{R}_3,$$

où

- $\mathcal{R}_1 = \{|\xi|\le r\nu_\varepsilon\}$ désigne la région des basses fréquences, dans laquelle le semi-groupe se compose d'une partie « parabolique », caractérisée par le terme $\exp(-(\nu_\varepsilon\varepsilon)^{-1}|\xi|^2 t)$, et d'une partie d'amortissement, caractérisée par $\exp(-\nu_\varepsilon\varepsilon^{-1}t)$.
- $\mathcal{R}_2 = \{r\nu_\varepsilon \le |\xi| \le R\varepsilon^{-1}\}$ désigne la région des fréquences intermédiaires, dans laquelle l'effet du facteur d'amortissement $\exp(-\nu_\varepsilon\varepsilon^{-1}t)$ de l'opérateur supplante celui de la partie parabolique $\exp(-\nu_\varepsilon\varepsilon|\xi|^2 t)$.
- $\mathcal{R}_3 = \{|\xi|\ge R\varepsilon^{-1}\}$ désigne la région des hautes fréquences, dans laquelle la partie parabolique de l'opérateur est forte et domine l'amortissement.

En accord avec cette décomposition, on introduit les parties basses, intermédiaires et hautes fréquences de $f\in L^2(\mathbb{R}^N)$

$$f_s = \mathcal{F}^{-1}(\chi_{|\xi|\le r\nu_\varepsilon}\hat{f}),\quad f_m = \mathcal{F}^{-1}(\chi_{r\nu_\varepsilon\le|\xi|\le R\varepsilon^{-1}}\hat{f})\quad\text{et}\quad f_h = \mathcal{F}^{-1}(\chi_{|\xi|\ge R\varepsilon^{-1}}\hat{f}),$$

où $\chi_{a\le|\xi|\le b}$ désigne la fonction caractéristique de l'anneau $\{a\le|\xi|\le b\}$. On a de la sorte

$$f = f_s + f_m + f_h = f_l + f_h.$$

7.4.2 Démonstration de la Proposition 7.4.

Introduisons pour commencer quelques notations. Soit

$$\mathcal{L}(b,z)(t) = \|(1+\varepsilon b)|z|^2(t)\|_{H^s} + \|b^2(t)\|_{H^s} + \|b(t)z(t)\|_{H^s} + \|\langle z,z\rangle(t)\|_{H^s}.$$

On trie ensuite les termes intervenant dans les définitions de $f(b,z)$ et de $g(b,z)$ dans le système (7.12) par ordre de dérivée : on pose

$$f(b,z) = \nu_\varepsilon f_0(b,z) + f_1(b,z)$$

et

$$g(b,z) = g_1(b,z) + \varepsilon g_2(b,z) = \nabla h_0(b,z) + \varepsilon \nabla h_1(b,z),$$

où l'indice $j = 0,1,2$ désigne l'ordre de la dérivée. Plus précisément, on a

$$\begin{cases} f_0(b,z) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}b)|z|^2 - \sqrt{2}b^2 \\ f_1(b,z) = -\mathrm{div}\,(b\mathrm{Re}z) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} g_1(b,z) = -\kappa_\varepsilon \nabla(\mathrm{Re}z \cdot \mathrm{Im}z) - \dfrac{1}{2}\nabla \mathrm{Re}\langle z,z\rangle = \nabla h_0 \\ g_2(b,z) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\nabla \mathrm{div}\,(b\mathrm{Im}z) = \nabla h_1. \end{cases}$$

La démonstration de la Proposition 7.4 repose sur les lemmes qui suivent.

Lemme 7.3. *Sous les hypothèses de la Proposition 7.4, on a pour $T \in [0,T_0]$*

$$\|(c,d)_s\|_{L^2_T(H^s)} \leq C\Big[(\varepsilon\nu_\varepsilon)^{1/2}X_0 + \varepsilon\|\mathcal{L}(b,z)\|_{L^2_T} + (\varepsilon\nu_\varepsilon)^{1/2}\|\mathcal{L}(b,z)\|_{L^1_T}\Big].$$

Démonstration. D'après le Lemme 7.2, on a

$$|\widehat{(c,d)}_s(t,\xi)| \leq C(I(t,\xi) + J(t,\xi)),$$

où

$$I(t,\xi) = \exp(-\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}t)|\widehat{(c,d)}_s(0,\xi)| + \int_0^t \exp\big(-\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}(t-\tau)\big)|\widehat{(F,G)}_s(\tau,\xi)|\,d\tau$$

et

$$\begin{aligned} J(t,\xi) &= \exp(-\frac{c|\xi|^2}{\nu_\varepsilon\varepsilon}t)\big|(|\xi|\nu_\varepsilon^{-1}\widehat{c_s}(0),\widehat{d_s}(0))\big| + \int_0^t \exp\big(-\frac{c|\xi|^2}{\nu_\varepsilon\varepsilon}(t-\tau)\big)\big|(|\xi|\nu_\varepsilon^{-1}\widehat{F_s},\widehat{G_s})\big|\,d\tau \\ &= J_L(t,\xi) + J_{NL}(t,\xi). \end{aligned}$$

On pose $\check{I} = \mathcal{F}^{-1}I$ et $\check{J} = \mathcal{F}^{-1}J$, de sorte que $\|(c,d)_s\|_{L^2_T(H^s)} \leq C(\|\check{I}\|_{L^2_T(H^s)} + \|\check{J}\|_{L^2_T(H^s)})$.

Première étape : estimation pour $\|\check{I}\|_{L^2_T(H^s)}$.
En invoquant le Lemme 7.8, on obtient

$$\begin{aligned} \|\check{I}\|_{L^2_T(H^s)} &\leq C\big[(\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1})^{1/2}\|(c,d)_s(0)\|_{H^s} + \varepsilon\nu_\varepsilon^{-1}\|(F,G)_s\|_{L^2_T(H^s)}\big] \\ &\leq C\big[(\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1})^{1/2}X_0 + \varepsilon\nu_\varepsilon^{-1}\|(f,g)_s\|_{L^2_T(H^s)}\big]. \end{aligned}$$

Ensuite, on remarque que pour tout $h \in H^s$, on a grâce aux propriétés du support de $\widehat{h_s}$

$$\|D^k h_s\|_{H^s} \le C\nu_\varepsilon^k \|h_s\|_{H^s}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

En appliquant cette inégalité aux termes d'ordre supérieur f_1, g_1 et g_2, on voit que

$$\|(f,g)_s(t)\|_{H^s} \le C(\nu_\varepsilon + \varepsilon\nu_\varepsilon^2)\mathcal{L}(b,z)(t),$$

et on conclut que

$$\|\check{I}\|_{L^2_T(H^s)} \le C\big[(\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1})^{1/2}X_0 + \varepsilon\|\mathcal{L}(b,z)\|_{L^2_T}\big].$$

Seconde étape : estimation pour $\|\check{J}\|_{L^2_T(H^s)}$.
On a

$$\|\check{J}\|_{L^2_T(H^s)} \le C(\|\check{J}_L\|_{L^2_T(H^s)} + \|\check{J}_{NL}\|_{L^2_T(H^s)}).$$

Tout d'abord, puisque $\nu_\varepsilon^{-1} \le 1$, on a pour le terme linéaire

$$\begin{aligned}\|\check{J}_L\|_{L^2_T(H^s)} &\le \big\|(1+|\xi|^s)e^{-\frac{c|\xi|^2}{\nu_\varepsilon\varepsilon}t}(|\xi|\nu_\varepsilon^{-1}|\widehat{c_s}(0)| + |\widehat{d_s}(0)|)\big\|_{L^2_T(L^2)}\\
&\le C\big\|(1+|\xi|^s)e^{-\frac{c|\xi|^2}{\nu_\varepsilon\varepsilon}t}|\xi|(|\widehat{c_s}(0)| + |\xi|^{-1}|\widehat{d_s}(0)|)\big\|_{L^2_T(L^2)}\\
&\le C\big\|(1+|\xi|^s)e^{-\frac{c|\xi|^2}{\nu_\varepsilon\varepsilon}t}|\xi|(|\widehat{c_s}(0)| + |\widehat{\varphi_s}(0)|)\big\|_{L^2_T(L^2)},\end{aligned}$$

car $d(0) = -2(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\varphi(0)$. On obtient donc d'après le Lemme 7.6 situé en annexe

$$\|\check{J}_L\|_{L^2_T(H^s)} \le C(\varepsilon\nu_\varepsilon)^{1/2}\big(\|c_s(0)\|_{H^s} + \|\varphi_s(0)\|_{H^s}\big) \le C(\varepsilon\nu_\varepsilon)^{1/2}X_0.$$

Par ailleurs, le Lemme 7.1 nous donne

$$\begin{aligned}\|\check{J}_{NL}\|_{L^2_T(H^s)} &\le \Big\|\int_0^t (1+|\xi|^s)e^{-\frac{c|\xi|^2}{\nu_\varepsilon\varepsilon}(t-\tau)}\big(|\xi|\nu_\varepsilon^{-1}|\widehat{F_s}| + |\widehat{G_s}|\big)\,d\tau\Big\|_{L^2_T(L^2)}\\
&\le \Big\|\int_0^t (1+|\xi|)^s e^{-\frac{c|\xi|^2}{\nu_\varepsilon\varepsilon}(t-\tau)}\big(|\xi|\nu_\varepsilon^{-1}|\widehat{f_s}| + |\widehat{g_s}|\big)\,d\tau\Big\|_{L^2_T(L^2)}.\end{aligned}$$

En insérant les expressions $f = \nu_\varepsilon f_0 + f_1$ et $g = \nabla h_0 + \varepsilon\nabla h_1$, on obtient

$$\begin{aligned}&\Big\|\int_0^t e^{-\frac{c|\xi|^2}{\nu_\varepsilon\varepsilon}(t-\tau)}(1+|\xi|^s)\big(|\xi|\nu_\varepsilon^{-1}|\widehat{f_s}| + |\widehat{g_s}|\big)\,d\tau\Big\|_{L^2_T(L^2)}\\
&\quad\le \Big\|\int_0^t e^{-\frac{c|\xi|^2}{\nu_\varepsilon\varepsilon}(t-\tau)}|\xi|(1+|\xi|^s)\big(|\widehat{f_0}| + |\widehat{h_0}|\big)\,d\tau\Big\|_{L^2_T(L^2)}\\
&\quad+ \Big\|\int_0^t e^{-\frac{c|\xi|^2}{\nu_\varepsilon\varepsilon}(t-\tau)}|\xi|^2(1+|\xi|^s)\big(\nu_\varepsilon^{-1}|\xi|^{-1}|\widehat{f_1}| + \varepsilon|\xi|^{-1}|\widehat{h_1}|\big)\,d\tau\Big\|_{L^2_T(L^2)}.\end{aligned}$$

En invoquant le Lemme 7.6, puis en utilisant les expressions de f_1 et h_1, on trouve d'une part

$$\begin{aligned}&\Big\|\int_0^t e^{-\frac{c|\xi|^2}{\nu_\varepsilon\varepsilon}(t-\tau)}|\xi|^2(1+|\xi|^s)\big(\nu_\varepsilon^{-1}|\xi|^{-1}|\widehat{f_1}| + \varepsilon|\xi|^{-1}|\widehat{h_1}|\big)\,d\tau\Big\|_{L^2_T(L^2)}\\
&\qquad\le C\varepsilon\nu_\varepsilon\|(1+|\xi|^s)(\nu_\varepsilon^{-1}|\xi|^{-1}\widehat{f_1}, \varepsilon|\xi|^{-1}\widehat{h_1})\|_{L^2_T(L^2)}\\
&\qquad\le C\varepsilon\nu_\varepsilon(\nu_\varepsilon^{-1} + \varepsilon)\|(1+|\xi|^s)(|\widehat{b\mathrm{Re}z}| + |\widehat{b\mathrm{Im}z}|)\|_{L^2_T(L^2)}\\
&\qquad\le C\varepsilon\nu_\varepsilon(\nu_\varepsilon^{-1} + \varepsilon)\|b\cdot z\|_{L^2_T(H^s)}\\
&\qquad\le C\varepsilon\|\mathcal{L}(b,z)\|_{L^2_T}.\end{aligned}$$

D'autre part, on déduit du Lemme 7.7 en annexe que

$$\begin{aligned}\Big\| \int_0^t e^{-\frac{c|\xi|^2}{\nu_\varepsilon \varepsilon}(t-\tau)} |\xi|(1+|\xi|^s)\big(|\widehat{f_0}| + |\widehat{h_0}|\big)\, d\tau \Big\|_{L^2_T(L^2)} \\ \leq C(\varepsilon\nu_\varepsilon)^{1/2} \|(1+|\xi|^s)(|\widehat{f_0}| + |\widehat{h_0}|)\|_{L^1_T(L^2)} \\ \leq C(\varepsilon\nu_\varepsilon)^{1/2} \|\mathcal{L}(b,z)\|_{L^1_T}.\end{aligned}$$

La conclusion du lemme résulte des étapes précédentes. □

Lemme 7.4. *Sous les hypothèses du Lemme 7.3, on a pour $T \in [0, T_0]$*

$$\|(c,d)_m\|_{L^2_T(H^s)} + \|(c,d)_h\|_{L^2_T(H^s)} \leq C\big[(\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1})^{1/2} X_0 + (\varepsilon + \nu_\varepsilon^{-1})\|\mathcal{L}(b,z)\|_{L^2_T}\big].$$

Démonstration. On procède en plusieurs étapes.

Première étape : fréquences intermédaires $r\nu_\varepsilon \leq |\xi| \leq R\varepsilon^{-1}$.
Une nouvelle utilisation du Lemme 7.2 donne

$$|\widehat{(c,d)}_m(t,\xi)| \leq C\exp(-\frac{\nu_\varepsilon}{2\varepsilon}t)|\widehat{(c,d)}_m(0,\xi)| + C\int_0^t \exp\big(-\frac{\nu_\varepsilon}{2\varepsilon}(t-\tau)\big)|\widehat{(F,G)}_m(\tau,\xi)|\, d\tau,$$

d'où, d'après le Lemme 7.8,

$$\|(c,d)_m\|_{L^2_T(H^s)} \leq C(\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1})^{1/2}\|(c,d)(0)\|_{H^s} + C\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1}\|(F,G)_m\|_{L^2_T(H^s)}.$$

Posons alors

$$(F,G)_m = \mathcal{A}_m + \mathcal{B}_m,$$

où $\mathcal{A}_m$ et $\mathcal{B}_m \in L^2_T(H^s \times H^s)$ seront choisies plus tard de sorte que $\widehat{\mathcal{A}_m}(t,\cdot)$ et $\widehat{\mathcal{B}_m}(t,\cdot)$ soient à supports contenus dans $\big(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \{|\xi| \leq R\varepsilon^{-1}\}\big)^2$. Ces propriétés de support entraînent que

$$\|(F,G)_m\|_{L^2_T(H^s)} \leq \|\mathcal{A}_m\|_{L^2_T(H^s)} + \|\mathcal{B}_m\|_{L^2_T(H^s)} \leq C(\varepsilon^{-1}\|\mathcal{A}_m\|_{L^2_T(H^{s-1})} + \varepsilon^{-2}\|\mathcal{B}_m\|_{L^2_T(H^{s-2})}),$$

d'où finalement

$$\|(c,d)_m\|_{L^2_T(H^s)} \leq C\big[(\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1})^{1/2}X_0 + \nu_\varepsilon^{-1}\big(\|\mathcal{A}_m\|_{L^2_T(H^{s-1})} + \varepsilon^{-1}\|\mathcal{B}_m\|_{L^2_T(H^{s-2})}\big)\big].$$

Deuxième étape : hautes fréquences $|\xi| \geq R\varepsilon^{-1}$.
Pour les hautes fréquences, on néglige la contribution du facteur d'amortissement $e^{-\frac{\nu_\varepsilon}{2\varepsilon}t}$ au profit de celle de $e^{-\nu_\varepsilon\varepsilon|\xi|^2 t}$. D'après le Lemme 7.2, on a alors

$$\begin{aligned}|\widehat{(c,d)}_h(t,\xi)| &\leq C\exp(-\nu_\varepsilon\varepsilon|\xi|^2 t)|\widehat{(c,d)}_h(0,\xi)| + C\int_0^t \exp\big(-\nu_\varepsilon\varepsilon|\xi|^2(t-\tau)\big)|\widehat{(F,G)}_h(\tau,\xi)|\, d\tau \\ &\leq C\varepsilon|\xi|\exp(-\nu_\varepsilon\varepsilon|\xi|^2 t)|\widehat{(c,d)}_h(0,\xi)| + C\int_0^t \exp\big(-\nu_\varepsilon\varepsilon|\xi|^2(t-\tau)\big)|\widehat{(F,G)}_h(\tau,\xi)|\, d\tau,\end{aligned}$$

où la seconde inégalité est due au fait que $1 \leq C\varepsilon|\xi|$ sur le support de $\widehat{(c,d)}_h$. En vertu du Lemme 7.6, on obtient

$$\|(c,d)_h\|_{L^2_T(H^s)} \leq C\big[(\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1})^{1/2}\|(c,d)_h(0)\|_{H^s} + (\nu_\varepsilon\varepsilon)^{-1}\|(F,G)_h\|_{L^2_T(H^{s-2})}\big].$$

De même que dans la première étape, posons

$$(F,G)_h = \mathcal{A}_h + \mathcal{B}_h,$$

où $\mathcal{A}_h$ et $\mathcal{B}_h \in L^2_T(H^{s-1} \times H^{s-1})$ seront choisies de sorte que les supports de $\widehat{\mathcal{A}_h}(t,\cdot)$ et $\widehat{\mathcal{B}_h}(t,\cdot)$ soient contenus dans la région $\big(\mathcal{R}_3 = \{|\xi| \geq R\varepsilon^{-1}\}\big)^2$. Ces propriétés de support permettent de gagner un facteur ε au détriment d'une dérivée :

$$\|(F,G)_h\|_{L^2_T(H^{s-2})} \leq \|\mathcal{A}_h\|_{L^2_T(H^{s-2})} + \|\mathcal{B}_h\|_{L^2_T(H^{s-2})} \leq C(\varepsilon\|\mathcal{A}_h\|_{L^2_T(H^{s-1})} + \|\mathcal{B}_h\|_{L^2_T(H^{s-2})}).$$

Finalement, les estimations précédentes nous mènent à

$$\|(c,d)_h\|_{L^2_T(H^s)} \leq C\big[(\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1})^{1/2}X_0 + \nu_\varepsilon^{-1}\big(\|\mathcal{A}_h\|_{L^2_T(H^{s-1})} + \varepsilon^{-1}\|\mathcal{B}_h\|_{L^2_T(H^{s-2})}\big)\big].$$

Troisième étape.

La dernière étape consiste à préciser notre choix pour les fonctions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Rappelons d'une part que

$$(F,G) = ((1-2^{-1}\varepsilon^2\Delta)^{\frac{1}{2}} f, (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\mathrm{div}\, g),$$

et d'autre part que

$$f(b,z) = \nu_\varepsilon f_0(b,z) + f_1(b,z), \quad g(b,z) = g_1(b,z) + \varepsilon g_2(b,z).$$

Pour les fréquences intermédiaires, on définit alors

$$\begin{cases} \mathcal{A}_m = \big((1-2^{-1}\varepsilon^2\Delta)^{\frac{1}{2}} f_m, (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{div}\,(g_1)_m\big) \\ \mathcal{B}_m = \big(0, \varepsilon(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{div}\,(g_2)_m\big), \end{cases}$$

et pour les hautes fréquences

$$\begin{cases} \mathcal{A}_h = \big(\nu_\varepsilon(1-2^{-1}\varepsilon^2\Delta)^{\frac{1}{2}} (f_0)_h, (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{div}\,(g_1)_h\big) \\ \mathcal{B}_h = \big((1-2^{-1}\varepsilon^2\Delta)^{\frac{1}{2}} (f_1)_h, \varepsilon(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{div}\,(g_2)_h\big). \end{cases}$$

On a clairement $\mathcal{A}_m + \mathcal{B}_m = (F,G)_m$ et $\mathcal{A}_h + \mathcal{B}_h = (F,G)_h$. De plus, on vérifie rapidement que

$$\|\mathcal{A}_m\|_{H^{s-1}} \approx \|(f,g_1)_m\|_{H^{s-1}}, \quad \|\mathcal{B}_m\|_{H^{s-2}} \approx \varepsilon\|(g_2)_m\|_{H^{s-2}}$$

et

$$\|\mathcal{A}_h\|_{H^{s-1}} \approx \|(\nu_\varepsilon\varepsilon\nabla f_0, g_1)_h\|_{H^{s-1}}, \quad \|\mathcal{B}_h\|_{H^{s-2}} \approx \|(\varepsilon\nabla f_1, \varepsilon g_2)_h\|_{H^{s-2}}.$$

Ensuite, on a d'une part

$$\|g_1\|_{H^{s-1}} + \|g_2\|_{H^{s-2}} \leq C(\|z\cdot z\|_{H^s} + \|b\mathrm{Im} z\|_{H^s}) \leq C\mathcal{L}(b,z).$$

D'autre part, grâce aux propriétés du support de $\widehat{(f_0)}_m$ on a $\|(f_0)_m\|_{H^{s-1}} \leq C\nu_\varepsilon^{-1}\|(f_0)_m\|_{H^s}$, d'où

$$\|f_m\|_{H^{s-1}} \leq \nu_\varepsilon\|(f_0)_m\|_{H^{s-1}} + \|(f_1)_m\|_{H^{s-1}} \leq C(\|(f_0)_m\|_{H^s} + \|(f_1)_m\|_{H^{s-1}}) \leq C\mathcal{L}(b,z).$$

De même, on a

$$\nu_\varepsilon\|(\varepsilon\nabla f_0)_h\|_{H^{s-1}} \leq C\nu_\varepsilon\varepsilon\|f_0\|_{H^s} \leq C\mathcal{L}(b,z)$$

et
$$\|(\varepsilon\nabla f_1)_h\|_{H^{s-2}} \leq \varepsilon\|f_1\|_{H^{s-1}} \leq C\varepsilon\mathcal{L}(b,z).$$

On déduit alors des inégalités précédentes que
$$\|\mathcal{A}_m\|_{H^{s-1}} + \|\mathcal{A}_h\|_{H^{s-1}} \leq C\mathcal{L}(b,z)$$
et
$$\|\mathcal{B}_m\|_{H^{s-2}} + \|\mathcal{B}_h\|_{H^{s-2}} \leq C\varepsilon\mathcal{L}(b,z),$$
et la conclusion du Lemme 7.4 résulte finalement des deux premières étapes. □

Afin d'établir la seconde partie de la Proposition 7.4 portant sur la quantité $\|b\|_{L^2(L^\infty)}$, on établit l'analogue des Lemmes 7.3 et 7.4 pour la quantité $\|c\|_{L^2_t(H^{s-1})}$.

Lemme 7.5. *Pour tout $T \in [0, T_0]$, on a l'estimation*
$$\|c\|_{L^2_T(H^{s-1})} \leq C\big[(\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1})^{1/2}X_0 + \varepsilon\|\mathcal{L}(b,z)\|_{L^2_T}\big].$$

Démonstration. La démonstration suit pas à pas celles des Lemmes 7.3 et 7.4. À nouveau, les régions $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3$ font l'objet d'une étude séparée.

Première étape : basses fréquences $|\xi| \leq r\nu_\varepsilon$.
En basses fréquences, on peut améliorer les estimations du Lemme 7.2 pour l'action du semi-groupe sur c. En effet, d'après l'identité (7.26) établie au cours de la preuve du Lemme 7.2 en annexe, on peut vérifier que
$$|\widehat{c_s}(t,\xi)| \leq C(I(t,\xi) + J(t,\xi)),$$
où
$$I(t,\xi) = \exp(-\frac{\nu_\varepsilon}{2\varepsilon}t)\big|\widehat{(c,d)}_s(0,\xi)\big| + \int_0^t \exp\big(-\frac{\nu_\varepsilon}{2\varepsilon}(t-\tau)\big)|\widehat{(F,G)}(\tau,\xi)|\,d\tau$$
et
$$\begin{aligned}J(t,\xi) &= \exp(-\frac{c|\xi|^2}{\nu_\varepsilon\varepsilon}t)\big|(|\xi|^2\nu_\varepsilon^{-2}\widehat{c_s}, |\xi|\nu_\varepsilon^{-1}\widehat{d_s})(0)\big|\\
&\quad + \int_0^t \exp\big(-\frac{c|\xi|^2}{\nu_\varepsilon\varepsilon}(t-\tau)\big)|(|\xi|^2\nu_\varepsilon^{-2}\widehat{F_s}, |\xi|\nu_\varepsilon^{-1}\widehat{G_s})|\,d\tau\\
&= J_L(t,\xi) + J_{NL}(t,\xi).\end{aligned}$$

Ici encore on note $\check{I} = \mathcal{F}^{-1}I$ et $\check{J} = \mathcal{F}^{-1}J$. La première étape de la démonstration du Lemme 7.3 assure déjà que
$$\begin{aligned}\|\check{I}\|_{L^2_T(H^s)} &\leq C\big[(\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1})^{1/2}\|(c,d)_s(0)\|_{H^s} + \varepsilon\nu_\varepsilon^{-1}\|(F,G)_s\|_{L^2_T(H^s)}\big]\\
&\leq C\big[(\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1})^{1/2}X_0 + \varepsilon\|\mathcal{L}(b,z)\|_{L^2_T}\big].\end{aligned}$$

Ensuite, puisque $|\xi|\nu_\varepsilon^{-1} \leq r$, on a
$$\begin{aligned}\|\check{J}_L\|_{L^2_T(H^{s-1})} &\leq \big\|e^{-\frac{c|\xi|^2}{\nu_\varepsilon\varepsilon}t}(1+|\xi|^{s-1})\big(|\xi|^2\nu_\varepsilon^{-2}|\widehat{c_s}(0)| + |\xi|\nu_\varepsilon^{-1}|\widehat{d_s}(0)|\big)\big\|_{L^2_T(L^2)}\\
&\leq C\nu_\varepsilon^{-1}\big\|e^{-\frac{c|\xi|^2}{\nu_\varepsilon\varepsilon}t}|\xi|(1+|\xi|^{s-1})\big(|\widehat{c_s}(0)| + |\widehat{d_s}(0)|\big)\big\|_{L^2_T(L^2)}\\
&\leq C\nu_\varepsilon^{-1}(\varepsilon\nu_\varepsilon)^{1/2}X_0,\end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle du Lemme 7.6.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\|\check{J}_{NL}\|_{L^2_T(H^{s-1})} &\leq C\Big\| \int_0^t e^{-\frac{c|\xi|^2}{\nu_\varepsilon \varepsilon}(t-\tau)}(1+|\xi|^{s-1})\big(|\xi|^2\nu_\varepsilon^{-2}|\widehat{F_s}| + |\xi|\nu_\varepsilon^{-1}|\widehat{G_s}|\big)\, d\tau\Big\|_{L^2_T(L^2)} \\
&\leq C\nu_\varepsilon^{-2}\Big\| \int_0^t e^{-\frac{c|\xi|^2}{\nu_\varepsilon \varepsilon}(t-\tau)}|\xi|^2(1+|\xi|^{s-1})|\widehat{F_s}|\, d\tau\Big\|_{L^2_T(L^2)} \\
&\quad + C\nu_\varepsilon^{-1}\Big\| \int_0^t e^{-\frac{c|\xi|^2}{\nu_\varepsilon \varepsilon}(t-\tau)}|\xi|^2(1+|\xi|^{s-1})|\xi|^{-1}|\widehat{G_s}|\, d\tau\Big\|_{L^2_T(L^2)}.
\end{aligned}$$

En faisant à nouveau appel au Lemme 7.6 pour chacun des termes, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\check{J}_{NL}\|_{L^2_T(H^{s-1})} &\leq C(\nu_\varepsilon\varepsilon\nu_\varepsilon^{-2}\|F_s\|_{L^2_T(H^{s-1})} + \nu_\varepsilon\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1}\|D^{-1}G_s\|_{L^2_T(H^{s-1})}) \\
&\leq C(\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1}\|f_s\|_{L^2_T(H^{s-1})} + \varepsilon\|D^{-1}g_s\|_{L^2_T(H^{s-1})}) \\
&\leq C\varepsilon\|\mathcal{L}(b,z)\|_{L^2_T}.
\end{aligned}$$

On déduit finalement des inégalités précédentes que

$$\|c_s\|_{L^2_T(H^{s-1})} \leq C\big[(\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1})^{1/2}X_0 + \varepsilon\|\mathcal{L}(b,z)\|_{L^2_T}\big].$$

Deuxième étape : fréquences intermédiaires $r\nu_\varepsilon \leq |\xi| \leq R\varepsilon^{-1}$.
Contrairement au cas des petites fréquences, on imite cette fois la première étape du Lemme 7.4. On cherche désormais une estimation dans H^{s-1} au lieu d'une estimation dans H^s :

$$\|c_m\|_{L^2_T(H^{s-1})} \leq C\|(c,d)_m\|_{L^2_T(H^{s-1})} \leq C\big[(\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1})^{1/2}\|(c,d)(0)\|_{H^{s-1}} + \varepsilon\nu_\varepsilon^{-1}\|(F,G)_m\|_{L^2_T(H^{s-1})}\big].$$

Rappelons que $(F,G)_m = \mathcal{A}_m + \mathcal{B}_m$, où $\widehat{\mathcal{A}_m}$ et $\widehat{\mathcal{B}_m}$ sont à supports inclus dans $\{|\xi| \leq R\varepsilon^{-1}\}$, de sorte que

$$\|(F,G)_m\|_{L^2_T(H^{s-1})} \leq \|\mathcal{A}_m\|_{L^2_T(H^{s-1})} + \|\mathcal{B}_m\|_{L^2_T(H^{s-1})} \leq \|\mathcal{A}_m\|_{L^2_T(H^{s-1})} + C\varepsilon^{-1}\|\mathcal{B}_m\|_{L^2_T(H^{s-2})}.$$

Au vu des estimations établies à la troisième étape de la preuve du Lemme 7.4 pour les normes de $\mathcal{A}_m$ et $\mathcal{B}_m$, on obtient finalement

$$\|c_m\|_{L^2_T(H^{s-1})} \leq C\big[(\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1})^{1/2}X_0 + \varepsilon\nu_\varepsilon^{-1}\|\mathcal{L}(b,z)\|_{L^2_T}\big].$$

Troisième étape : hautes fréquences $|\xi| \geq R\varepsilon^{-1}$.
En procédant exactement comme dans la preuve du Lemme 7.4, on parvient à l'inégalité

$$\|c_h\|_{L^2_T(H^{s-1})} \leq \|(c,d)_h\|_{L^2_T(H^{s-1})} \leq C\big[(\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1})^{1/2}X_0 + \varepsilon\nu_\varepsilon^{-1}(\|\mathcal{A}_h\|_{L^2_T(H^{s-1})} + \varepsilon^{-1}\|\mathcal{B}_h\|_{L^2_T(H^{s-2})})\big],$$

où $(F,G)_h = \mathcal{A}_h + \mathcal{B}_h$, et on déduit des estimations pour $\mathcal{A}_h$ et $\mathcal{B}_h$ que

$$\|c_h\|_{L^2_T(H^{s-1})} \leq C\big[(\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1})^{1/2}X_0 + \varepsilon\nu_\varepsilon^{-1}\|\mathcal{L}(b,z)\|_{L^2_T}\big].$$

Ceci conclut la démonstration du Lemme 7.5. $\square$

A l'aide des lemmes précédents, on peut à présent achever la

Démonstration de la Proposition 7.4.

L'inégalité de Cagliardo-Nirenberg donne d'une part

$$\||z|^2\|_{H^s} + \|b^2\|_{H^s} + \|bz\|_{H^s} + \|\langle z, z\rangle\|_{H^s} \leq C\|(b,z)\|_\infty\|(b,z)\|_{H^s}$$

et

$$\|\varepsilon b|z|^2\|_{H^s} \leq C\varepsilon\|(b,z)\|_\infty^2\|(b,z)\|_{H^s},$$

d'où

$$\mathcal{L}(b,z) \leq C(1+\varepsilon\|(b,z)\|_\infty)\|(b,z)\|_\infty\|(b,z)\|_{H^s}.$$

Après application de l'injection de Sobolev et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\|\mathcal{L}(b,z)\|_{L^2_T} \leq C\big(1+\varepsilon\|(b,z)\|_{L^\infty_T(H^s)}\big)\|(b,z)\|_{L^\infty_T(H^s)}\|(b,z)\|_{L^2_T(H^s)}$$

et

$$\|\mathcal{L}(b,z)\|_{L^1_T} \leq C\big(1+\varepsilon\|(b,z)\|_{L^\infty_T(H^s)}\big)\|(b,z)\|^2_{L^2_T(H^s)}.$$

La conclusion résulte finalement des deux inégalités précédentes combinées aux Lemmes 7.3, 7.4 et 7.5. □

On clôt cette section avec un résultat qui nous sera utile au cours de la section suivante. La preuve est une adaptation directe de celle du Lemme 7.5.

Proposition 7.5. *Pour tout $T \in [0, T_0]$, on a*

$$\|c\|_{L^2_T(H^s)} \leq C\big[(\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1})^{1/2}X_0 + \nu_\varepsilon^{-1}\|(b,z)\|_{L^\infty_T(H^s)}\|(b,z)\|_{L^2_T(H^s)}(1+\varepsilon\|(b,z)\|_{L^\infty_T(H^s)})\big].$$

7.5 Démonstration des Théorèmes 7.1 et 7.3.

7.5.1 Démonstration du Théorème 7.1.

Ce paragraphe est finalement consacré à la démonstration du Théorème 7.1 à partir des résultats établis précédemment. Soit $\Psi^0 \in \mathcal{W} + H^{s+1}$ telle que

$$\Psi^0 = \rho^0\exp(i\varphi^0) = \big(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}a^0\big)^{1/2}\exp(i\varphi^0),$$

où (a^0, φ^0) vérifie les hypothèses du Théorème 7.1. Soit $\Psi \in \mathcal{W} + C([0,T^*), H^{s+1})$ la solution de $(\mathrm{GLC})_\varepsilon$ correspondante fournie par le Théorème 7.4.

Soit $c(s,N)$ la constante optimale associée à l'injection de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$, et supposons d'abord que la constante $K_1(s,N)$ des hypothèses du Théorème 7.1 vérifie

$$K_1(s,N) > \sqrt{2}c(s,N). \tag{7.15}$$

Ainsi, on a

$$\||\Psi^0|^2 - 1\|_\infty = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\|a^0\|_\infty < \frac{1}{2},$$

et en particulier les hypothèses du Corollaire 7.1 sont vérifiées. Soit (b,v) la solution fournie par le Corollaire 7.1 sur un intervalle de temps maximal $[0,T_0)$, avec $T_0 \leq T^*$.

On introduit la fonction

$$H(t) = \|(b,z)\|_{L_t^\infty(H^s)} + (\varepsilon\nu_\varepsilon)^{-1/2}\|(b,z)\|_{L_t^2(H^s)} + (\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1})^{-1/2}\|b\|_{L_t^2(L^\infty)}, \quad H_0 = H(0).$$

Puisque $H(0) = \|(b^0, z^0)\|_{H^s}$, on a d'après (7.14)

$$H(0) \leq C_1(s,N)X_0 \quad \text{et} \quad C_1(s,N)^{-1}(\|(b,v)(t)\|_{H^s} + \varepsilon\|b(t)\|_{H^{s+1}}) \leq H(t),$$

pour une constante $C_1(s,N)$ ne dépendant que de s et de N. Quitte à accroître $K_1(s,N)$, on peut supposer que $C_1(s,N) < K_1(s,N)$.

Définissons le temps

$$T_\varepsilon = \sup\{t \in [0,T_0) \quad \text{tel que} \quad H(t) < C_2(s,N)X_0\},$$

où $C_2(s,N)$ désigne une constante à déterminer plus tard, satisfaisant à

$$C_1(s,N) < C_2(s,N) < K_1(s,N). \tag{7.16}$$

La continuité de $t \mapsto H(t)$ assure le fait que $T_\varepsilon > 0$. Puisque κ_ε tend vers zéro, on peut supposer que

$$\kappa_\varepsilon C_2(s,N) < \frac{K_1(s,N)}{\sqrt{2}c(s,N)}, \tag{7.17}$$

ce qui implique, par hypothèse sur X_0, que

$$C_2(s,N)X_0 < \frac{C_2(s,N)\nu_\varepsilon}{K_1(s,N)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}c(s,N)\varepsilon}.$$

En particulier, puisque $\|(b,z)(t)\|_{H^s} \leq H(t)$, la définition de T_ε ainsi que l'injection de Sobolev impliquent que

$$\||\Psi|^2(t) - 1\|_\infty < \frac{1}{2}, \quad \forall t \in [0,T_\varepsilon). \tag{7.18}$$

On se propose ensuite de démontrer que $T_\varepsilon = T_0 = T^* = +\infty$.

Tout d'abord, quitte à approcher (a^0, u^0) par des fonctions régulières, on peut supposer que $(b,z) \in C^1([0,T_0), H^{s+1})$. D'après (7.18), les Propositions 7.3 et 7.4 assurent que

$$\begin{aligned} H(t) &\leq C(s,N)\Big[H_0 + H(t)^2\big[\kappa_\varepsilon + \kappa_\varepsilon^2 H(t) + (\varepsilon + \kappa_\varepsilon + \nu_\varepsilon^{-1})(1+\varepsilon H(t))\big]\Big] \\ &\leq C_3(s,N)\Big[H_0 + H(t)^2\big[\kappa_\varepsilon^2 H(t) + (\kappa_\varepsilon + \nu_\varepsilon^{-1})(1+\varepsilon H(t))\big]\Big], \quad \forall t \in [0,T_\varepsilon], \end{aligned}$$

où la seconde inégalité résulte du fait que $\varepsilon \leq \kappa_\varepsilon$. Ici $C_3(s,N)$ est une constante ne dépendant que de s et de N, que l'on peut supposer supérieure à 1. Or, pour $t \in [0,T_\varepsilon]$, on a d'après (7.16) et par hypothèse sur X_0

$$\max(\varepsilon H(t), \kappa_\varepsilon H(t)) < \kappa_\varepsilon C_2(s,N)X_0 \leq 1,$$

d'où

$$H(t) \leq 3C_3(s,N)[H_0 + (\kappa_\varepsilon + \nu_\varepsilon^{-1})H(t)^2]. \tag{7.19}$$

On peut maintenant ajuster les constantes $C_2(s,N)$ et $K_1(s,N)$ comme suit :

$$C_2(s,N) = 4C_3(s,N) \quad \text{et} \quad K_1(s,N) > 96C_3(s,N)^2\max(\sqrt{2}c(s,N), 1, C_2(s,N)),$$

pour lesquelles les conditions (7.15), (7.16) et (7.17) sont vérifiées.

Montrons que pour ce choix, on a $T_\varepsilon = T_0$. En effet, si ce n'est pas le cas, T_ε est fini. On peut donc considérer l'inégalité (7.19) au temps T_ε, ce qui conduit à

$$4C_3(s,N)H_0 \leq 3C_3(s,N)[H_0 + 16(\kappa_\varepsilon + \nu_\varepsilon^{-1})C_3(s,N)^2 H_0^2],$$

d'où

$$1 \leq 48C_3(s,N)^2(\kappa_\varepsilon + \nu_\varepsilon^{-1})H_0 \leq \frac{96C_3(s,N)^2 C_2(s,N)}{K_1(s,N)}.$$

D'après la définition de $K_1(s,N)$, cette inégalité mène à une contradiction, d'où le fait que $T_\varepsilon = T_0$.

Ensuite, puisque (7.18) a lieu sur $[0, T_0)$, le Corollaire 7.1 et un argument de prolongement assurent que $T_0 = T^*$. En invoquant à nouveau (7.18), on montre sans peine que

$$\|\nabla\Psi(t)\|_{H^s} \leq C\big(1 + \|(b,v)(t)\|^2_{H^{s+1}\times H^s}\big), \quad \forall t \in [0, T^*),$$

pour une constante C. Au vu des majorations obtenues précédemment, on obtient donc

$$\limsup_{t\to T^*} \|\nabla\Psi(t)\|_{H^s} \leq \limsup_{t\to T^*} C(1 + H(t)^2) < \infty.$$

On conclut enfin à l'aide du Théorème 7.4 que $T^* = +\infty$. □

7.5.2 Démonstration du Théorème 7.3.

La démonstration du Théorème 7.3 fait l'objet de ce dernier paragraphe. À nouveau, C désigne une constante ne dépendant que de s et de N, qui peut varier d'une ligne à l'autre. Définissons $(b_{\mathrm{L}}, v_{\mathrm{L}})(t,x) = (a_{\mathrm{L}}, u_{\mathrm{L}})(\varepsilon^{-1}t, x)$, où $(a_{\mathrm{L}}, u_{\mathrm{L}})$ désigne la solution du système homogène (7.5). Considérons

$$\begin{cases} (\mathrm{b}, \mathrm{v}) = (b - b_{\mathrm{L}}, v - v_{\mathrm{L}}) \in H^{s+1} \times H^s \\ (\mathrm{b}, \mathrm{v})(0) = (0,0), \end{cases}$$

qui vérifie

$$\begin{cases} \partial_t \mathrm{b} + \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\operatorname{div} \mathrm{v} + \dfrac{2\nu_\varepsilon}{\varepsilon}\mathrm{b} - \kappa_\varepsilon \Delta \mathrm{b} = f(b,v) \\ \partial_t \mathrm{v} + \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\nabla \mathrm{b} - \kappa_\varepsilon \Delta \mathrm{v} = g(b,v) + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\nabla\Delta b. \end{cases}$$

Pour $0 \leq k \leq s$, on calcule par intégration par parties

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(D^k\mathrm{b}, D^k\mathrm{v})(t)\|^2_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^N} D^k\mathrm{b}\, D^k\partial_t\mathrm{b} + D^k\mathrm{v}\cdot D^k\partial_t\mathrm{v} \\ &= -\frac{2\nu_\varepsilon}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^N} |D^k\mathrm{b}|^2 - \kappa_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla D^k\mathrm{b}|^2 - \kappa_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla D^k\mathrm{v}|^2 \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} D^k\mathrm{b}\, D^k f + \int_{\mathbb{R}^N} D^k\mathrm{v}\cdot D^k g + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\int_{\mathbb{R}^N} D^k\mathrm{v}\cdot D^k\nabla\Delta b. \end{aligned}$$

Posons $f = \nu_\varepsilon f_0 + f_1$ et $g = g_1 + \varepsilon g_2 = \nabla h_0 + \varepsilon\nabla h_1$, où $f_i, g_i, h_i, i = 0,1,2$, définies au Paragraphe 7.4.2, sont des dérivées d'ordre i de fonctions quadratiques en (b,z). On obtient ainsi

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(D^k\mathrm{b}, D^k\mathrm{v})(t)\|^2_{L^2} \leq I + J + K,$$

où

$$I = -\frac{2\nu_\varepsilon}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^N}|D^k\mathrm{b}|^2 + \nu_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N} D^k f_0\, D^k\mathrm{b},$$
$$J = \int_{\mathbb{R}^N} D^k f_1\, D^k\mathrm{b} + \int_{\mathbb{R}^N} D^k\mathrm{v}\cdot D^k g_1$$

et

$$K = -\kappa_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla D^k\mathrm{v}|^2 + \varepsilon\int_{\mathbb{R}^N} D^k\mathrm{v}\cdot D^k g_2 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}D^k\mathrm{v}\cdot D^k\nabla\Delta b.$$

Première étape.
On commence par établir la première assertion du Théorème 7.3. Tout d'abord, on a d'après l'inégalité de Young

$$I \leq -\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^N}|D^k\mathrm{b}|^2 + C\varepsilon\nu_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}|D^k f_0|^2 \leq C\kappa_\varepsilon\|f_0\|^2_{H^k},$$

ce qui nous donne, en vertu du Lemme 7.9 en annexe et par injection de Sobolev,

$$I \leq C\kappa_\varepsilon\|(b,z)\|^4_{H^s}.$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$J \leq \|(D^k\mathrm{b}, D^k\mathrm{v})\|_{L^2}\|(f_1,g_1)\|_{H^s} \leq C\|(D^k\mathrm{b}, D^k\mathrm{v})\|_{L^2}\|(b,z)\|^2_{H^{s+1}}.$$

En vue d'établir une estimation de K, on procède d'abord à une intégration par parties. Puisque $g_2 = \nabla h_1$, on obtient au moyen de l'inégalité de Young

$$\begin{aligned}K &= -\kappa_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla D^k\mathrm{v}|^2 - \varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}\operatorname{div} D^k\mathrm{v}\cdot D^k h_1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\int_{\mathbb{R}^N}\operatorname{div} D^k\mathrm{v}\cdot D^k\Delta b\\ &\leq -\frac{\kappa_\varepsilon}{4}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla D^k\mathrm{v}|^2 + C\frac{\varepsilon^2}{\kappa_\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^N}|D^k h_1|^2 + \frac{C}{\kappa_\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^N}|\varepsilon\Delta D^k b|^2.\end{aligned}$$

D'une part, en employant les inégalités de Gagliardo-Nirenberg et de Sobolev, on trouve

$$\|D^k h_1\|_{L^2} \leq C\|(b,z)\|_{L^\infty}\|(b,z)\|_{H^{s+1}} \leq C\|(b,z)\|_{H^s}\|(b,z)\|_{H^{s+1}}.$$

D'autre part, puisque $k \leq s$, on a également

$$\|\varepsilon\Delta D^k b\|_{L^2} \leq C\varepsilon\|b\|_{H^{s+2}} \leq C\|c\|_{H^{s+1}} \leq C\|(b,z)\|_{H^{s+1}},$$

où $c = (1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta)^{\frac{1}{2}} b$ est défini au début de la Section 7.4. La dernière inégalité résulte de (7.14). On parvient ainsi à

$$K \leq C\kappa_\varepsilon^{-1}\|(b,z)\|^2_{H^{s+1}}[1 + \varepsilon^2\|(b,z)\|^2_{H^s}].$$

En intégrant les estimations précédentes pour I, J et K sur $[0,t]$, on obtient

$$\begin{aligned}\|(D^k\mathrm{b}, D^k\mathrm{v})(t)\|^2_{L^2} &\leq C\int_0^t \|(D^k\mathrm{b}, D^k\mathrm{v})(\tau)\|_{L^2}\|(b,z)\|^2_{H^{s+1}}\,d\tau\\ &+C\int_0^t[\kappa_\varepsilon\|(b,z)\|^4_{H^s} + \kappa_\varepsilon^{-1}\|(b,z)\|^2_{H^{s+1}}(1 + \varepsilon^2\|(b,z)\|^2_{H^s})]\,d\tau,\end{aligned}$$

d'où, en appliquant l'inégalité de Young au premier terme du membre de droite,

$$\begin{aligned}\|(D^k\mathrm{b}, D^k\mathrm{v})\|^2_{L^\infty_t(L^2)} &\le C\|(b,z)\|^4_{L^2_t(H^{s+1})} \\ &+ C\int_0^t [\kappa_\varepsilon\|(b,z)\|^4_{H^s} + \kappa_\varepsilon^{-1}\|(b,z)\|^2_{H^{s+1}}(1+\varepsilon^2\|(b,z)\|^2_{H^s})]\,d\tau.\end{aligned} \tag{7.20}$$

On évalue ensuite chaque terme du membre de droite grâce aux estimations établies au cours des sections précédentes. D'une part, nous avons vu au cours de la démonstration du Théorème 7.1 que

$$H(t) = \|(b,z)\|_{L^\infty_t(H^s)} + \kappa_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|(b,z)\|_{L^2_t(H^s)} + (\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1})^{-\frac{1}{2}}\|b\|_{L^2_t(L^\infty)} \le CX_0, \quad \forall t\in\mathbb{R}_+, \tag{7.21}$$

et X_0 vérifie par hypothèse $\kappa_\varepsilon X_0 \le C$. On en déduit immédiatement que

$$\kappa_\varepsilon \int_0^t \|(b,z)\|^4_{H^s}\,d\tau \le C\kappa_\varepsilon^2 H(t)^4 \le CX_0^2. \tag{7.22}$$

D'autre part, on déduit de la seconde inégalité de la Proposition 7.3 et de (7.21) que

$$\kappa_\varepsilon\|(Db,Dz)\|^2_{L^2_t(H^s)} \le CX_0^2 + CH(t)[\nu_\varepsilon\kappa_\varepsilon^{1/2}(\varepsilon\nu_\varepsilon^{-1})^{1/2}H(t)^2 + \kappa_\varepsilon H^2(t)(1+\kappa_\varepsilon H(t))] \le CX_0^2.$$

D'un autre côté, (7.21) entraîne que $\|(b,z)\|^2_{L^2_t(H^s)} \le C\kappa_\varepsilon X_0^2$, par conséquent on a

$$\|(b,z)\|^2_{L^2_t(H^{s+1})} \le C\kappa_\varepsilon^{-1}X_0^2, \tag{7.23}$$

et il s'ensuit finalement que

$$\kappa_\varepsilon^{-1}\int_0^t \|(b,z)\|^2_{H^{s+1}}(1+\varepsilon^2\|(b,z)\|^2_{H^s})\,d\tau \le C\kappa_\varepsilon^{-1}(1+\varepsilon^2H(t)^2)\|(b,z)\|^2_{L^2_t(H^{s+1})} \le C\kappa_\varepsilon^{-2}X_0^2. \tag{7.24}$$

Enfin, en rassemblant (7.20), (7.22), (7.23) et (7.24), on est mené à

$$\|(D^k\mathrm{b}, D^k\mathrm{v})\|^2_{L^\infty_t(L^2)} \le C\kappa_\varepsilon^{-2}X_0^2(1+X_0^2),$$

et il suffit d'ajouter les inégalités obtenues pour $0\le k\le s$ pour aboutir à la première estimation du Théorème 7.3.

Deuxième étape.
Afin d'établir la deuxième estimation du Théorème 7.3, on répète les calculs précédents pour des entiers k satisfaisant cette fois $0\le k\le s-1$. Dans ce cas, la quantité I définie précédemment vérifie à nouveau la majoration

$$I \le C\kappa_\varepsilon\|(b,z)\|^4_{H^s}.$$

Par ailleurs, puisque $0\le k\le s-1$, on a dans le cas présent

$$J \le \|(D^k\mathrm{b}, D^k\mathrm{v})\|_{L^2}\|(f_1,g_1)\|_{H^{s-1}} \le C\|(D^k\mathrm{b}, D^k\mathrm{v})\|_{L^2}\|(b,z)\|^2_{H^s}.$$

L'estimation pour K devient quant à elle

$$K \le C[\varepsilon^2\kappa_\varepsilon^{-1}\|(b,z)\|^4_{H^s} + \kappa_\varepsilon^{-1}\|c\|^2_{H^s}] \le C[\kappa_\varepsilon\|(b,z)\|^4_{H^s} + \kappa_\varepsilon^{-1}\|c\|^2_{H^s}],$$

où la dernière inégalité est due au fait que $\varepsilon \leq \kappa_\varepsilon$, et par conséquent l'inégalité (7.20) devient

$$\|(D^k \mathrm{b}, D^k \mathrm{v})\|^2_{L^\infty_t(L^2)} \leq C[\kappa_\varepsilon \int_0^t \|(b,z)\|^4_{H^s}\, d\tau + \|(b,z)\|^4_{L^2_t(H^s)} + \kappa_\varepsilon^{-1}\|c\|^2_{L^2_t(H^s)}]. \tag{7.25}$$

Puis, des calculs directs utilisant (7.21), la première inégalité de (7.22) ainsi que la Proposition 7.5 pour $\|c\|_{L^2_t(H^s)}$ nous conduisent à

$$\|(D^k \mathrm{b}, D^k \mathrm{v})\|_{L^\infty_t(L^2)} \leq C\left[(\kappa_\varepsilon + \nu_\varepsilon^{-1})X_0^2 + \nu_\varepsilon^{-1}X_0\right],$$

et il ne nous reste plus qu'à ajouter les inégalités précédentes pour k variant de 0 à $s-1$ pour obtenir l'estimation souhaitée.

Troisième étape.
Enfin, pour établir la dernière assertion du Théorème 7.3, on remarque que

$$\|(b,z)\|^4_{L^2_t(H^s)} \leq t\|(b,z)\|^2_{L^\infty_t(H^s)}\|(b,z)\|^2_{L^2_t(H^s)}$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, par conséquent l'inégalité (7.25) devient

$$\begin{aligned}\|(D^k \mathrm{b}, D^k \mathrm{v})\|^2_{L^\infty_t(L^2)} \leq{}& Ct[\kappa_\varepsilon\|(b,z)\|^4_{L^\infty_t(H^s)} \\ &+ \|(b,z)\|^2_{L^\infty_t(H^s)}\|(b,z)\|^2_{L^2_t(H^s)} + \kappa_\varepsilon^{-1}\|(b,z)\|^2_{L^\infty_t(H^s)}].\end{aligned}$$

On déduit alors de (7.21), ainsi que du fait que $\kappa_\varepsilon X_0$ soit borné, l'estimation

$$\|(\mathrm{b},\mathrm{v})(t)\|^2_{H^{s-1}} \leq Ct[\kappa_\varepsilon X_0^4 + \kappa_\varepsilon^{-1}X_0^2] \leq Ct\kappa_\varepsilon^{-1}X_0^2.$$

Ceci achève la preuve du Théorème 7.3, puisque $(a_\varepsilon, u_\varepsilon)(t) = (b_\varepsilon, v_\varepsilon)(\varepsilon t)$. □

7.6 Annexe.

Cette annexe rassemble quelques résultats utilisés au cours du chapitre.

7.6.1 Quelques estimations paraboliques et autres outils utiles.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate des propriétés de régularité maximale $L^2 - L^2$ du semi-groupe $e^{t\Delta}$ associé à l'équation de la chaleur. On pourra par exemple se rapporter à [66].

Lemme 7.6. *Soient $\lambda > 0$, $a_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $a = a(s) \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$. Il existe une constante C telle que pour tout $T > 0$,*

$$\|e^{\lambda t\Delta}a_0\|_{L^2_T(\dot{H}^1)} \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}}\|a_0\|_{L^2}$$

et

$$\|\Delta \int_0^t e^{\lambda(t-s)\Delta}a(s)\, ds\|_{L^2_T(L^2)} \leq \frac{C}{\lambda}\|a\|_{L^2_T(L^2)}.$$

Ensuite, on a le

Lemme 7.7. *Soient $\lambda > 0$ et $H \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$. Il existe une constante C telle que pour tout $T > 0$,*

$$\Big\| \int_0^t e^{\lambda(t-s)\Delta} H(s)\, ds \Big\|_{L^2_T(\dot{H}^1)} \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}} \int_0^T \|H(t)\|_{L^2}\, dt.$$

Démonstration. On peut supposer que H est régulière et que $u(t,\cdot) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)\Delta} H(s,\cdot)\, ds$ est la solution régulière de

$$\partial_t u - \lambda \Delta u = H \quad \text{et} \quad u(0) = 0.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^N} uH - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2,$$

d'où

$$\lambda \|\nabla u\|^2_{L^2_T(L^2)} \leq C \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u||H|\, dt\, dx \leq C \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{L^2} \|H\|_{L^1_T(L^2)}.$$

Or $u(0) = 0$, donc on a également $\|u(t)\|^2_{L^2} \leq C \int_0^t \int |uH|$, d'où

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{L^2} \leq C\|H\|_{L^1_T(L^2)},$$

et la conclusion s'ensuit. □

Lemme 7.8. *Soient $\lambda > 0$, $a_0 \in L^2$ et $a \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$. Il existe une constante C telle que pour tout $T > 0$,*

$$\|e^{-\lambda t} a_0\|_{L^2_T} \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}} \|a_0\|_{L^2}$$

et

$$\Big\| \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} a(s,\cdot)\, ds \Big\|_{L^2_T(L^2)} \leq \frac{C}{\lambda} \|a\|_{L^2_T(L^2)}.$$

Démonstration. On établit seulement la seconde estimation. Posons $\tilde{a}(s) = a(s)$ pour $s \in [0,T]$ et $\tilde{a} = 0$ pour $s \notin [0,T]$. Ainsi,

$$\Big\| \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} a(s)\, ds \Big\|_{L^2_T(L^2)} \leq \Big\| \int_0^T e^{-\lambda(t-s)} \|\tilde{a}(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\, ds \Big\|_{L^2_T} = \|e^{-\lambda\cdot} * \|\tilde{a}(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|_{L^2}.$$

D'après l'inégalité de Young pour la convolution, on a alors

$$\Big\| \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} a(s)\, ds \Big\|_{L^2_T(L^2)} \leq C \|e^{-\lambda\cdot}\|_{L^1} \|\tilde{a}\|_{L^2(\mathbb{R}_+, L^2)},$$

et la conclusion est finalement une conséquence de la définition de $\tilde{a}$. □

Pour conclure ce paragraphe, on rappelle une inégalité résultant de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg.

Lemme 7.9 (cf. [46], Lemme 3)**.** *Soient $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, \dots, k\}$. Alors il existe une constante $C(k,N)$ telle que*

$$\|D^j u D^{k-j} v\|_{L^2} \leq C(k,N) \Big(\|u\|_\infty \|D^k v\|_{L^2} + \|v\|_\infty \|D^k u\|_{L^2} \Big)$$

et

$$\|uv\|_{H^k} \leq C(k,N) \left(\|u\|_\infty \|v\|_{H^k} + \|v\|_\infty \|u\|_{H^k} \right).$$

7.6.2 Démonstration du Lemme 7.2.

Dans toute la démonstration, C désignera une constante. Afin d'alléger les notations, on introduit les quantités

$$\omega = \varepsilon^2|\xi|^2 \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1}{\nu_\varepsilon}|\xi|\sqrt{2+\omega},$$

et l'on récrit M sous la forme

$$M = \frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}\begin{pmatrix} 2+\omega & \mu \\ -\mu & \omega \end{pmatrix}.$$

Dans un premier temps, on calcule les valeurs propres λ_1 et λ_2 de M. On introduit

$$\Delta = 1-\mu^2,$$

alors

$$\lambda_1 = \frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}(\omega+1-\sqrt[\mathbb{C}]{\Delta}) \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}(\omega+1+\sqrt[\mathbb{C}]{\Delta}),$$

où $\sqrt[\mathbb{C}]{\Delta}$ vaut $\sqrt{\Delta}$ si $\Delta \geq 0$ et vaut $i\sqrt{-\Delta}$ si $\Delta < 0$. Après diagonalisation, M s'écrit $M = P^{-1}DP$, où $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ et

$$P^{-1} = \frac{1}{\mu^2-\alpha^2}\begin{pmatrix} -\mu & \alpha \\ \alpha & -\mu \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -\mu & -\alpha \\ -\alpha & -\mu \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \alpha = 1+\sqrt[\mathbb{C}]{\Delta}.$$

Finalement, pour $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} e^{-tM}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = P^{-1}e^{-tD}P\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \frac{1}{\mu^2-\alpha^2}\begin{pmatrix} (\mu^2 a+\alpha\mu b)e^{-\lambda_1 t} - (\alpha^2 a+\alpha\mu b)e^{-\lambda_2 t} \\ (\alpha\mu a+\mu^2 b)e^{-\lambda_2 t} - (\alpha\mu a+\alpha^2 b)e^{-\lambda_1 t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^{-\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}(1+\omega)t}}{\mu^2-\alpha^2}\begin{pmatrix} (\mu^2 a+\alpha\mu b)e^{\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}\sqrt[\mathbb{C}]{\Delta}t} - (\alpha^2 a+\alpha\mu b)e^{-\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}\sqrt[\mathbb{C}]{\Delta}t} \\ (\alpha\mu a+\mu^2 b)e^{-\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}\sqrt[\mathbb{C}]{\Delta}t} - (\alpha\mu a+\alpha^2 b)e^{\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}\sqrt[\mathbb{C}]{\Delta}t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

soit encore

$$e^{-tM}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = e^{-\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}(1+\omega)t}\left[e^{-\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}\sqrt[\mathbb{C}]{\Delta}t}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \frac{e^{\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}\sqrt[\mathbb{C}]{\Delta}t} - e^{-\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}\sqrt[\mathbb{C}]{\Delta}t}}{\mu^2-\alpha^2}\begin{pmatrix} \alpha\mu b+\mu^2 a \\ -\alpha\mu a-\alpha^2 b \end{pmatrix}\right]. \tag{7.26}$$

On envisage ici deux cas.

Premier cas $|\xi|^2 \geq 3\nu_\varepsilon^2/8$.
Alors $\mu^2 \geq 3/4$ et par conséquent $\Delta \leq 1/4$. On distingue les trois sous-cas suivants.

• $0 \leq \Delta \leq 1/4$.
Il s'ensuit que $\sqrt[\mathbb{C}]{\Delta} = \sqrt{\Delta}$ et que $\mu^2-\alpha^2 = -2(\Delta+\sqrt{\Delta})$, de sorte que

$$\left|\frac{e^{\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}\sqrt{\Delta}t} - e^{-\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}\sqrt{\Delta}t}}{\mu^2-\alpha^2}\right| \leq \frac{\sinh\left(\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}\sqrt{\Delta}t\right)}{\sqrt{\Delta}} \leq C\sinh\left(\frac{\nu_\varepsilon t}{2\varepsilon}\right),$$

où la seconde inégalité résulte de la croissance de $x \mapsto \sinh(x)/x$ sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit l'estimation

$$\left|e^{-tM(\xi)}(a,b)\right| \leq C\exp\left(-\frac{\nu_\varepsilon}{2\varepsilon}t\right)\exp\left(-\frac{\nu_\varepsilon\omega}{\varepsilon}t\right)\big(|a|+|b|\big). \tag{7.27}$$

• $-1 \leq \Delta < 0$.
Alors on a $\sqrt[\mathbb{C}]{\Delta} = i\sqrt{-\Delta}$ et $\mu^2 - \alpha^2 = -2(\Delta + i\sqrt{-\Delta})$, par conséquent

$$|\mu^2 - \alpha^2| = 2\sqrt{\Delta^2 - \Delta} \geq 2\sqrt{-\Delta}.$$

Il s'ensuit que

$$\left|\frac{\exp(i\frac{\nu_\varepsilon\sqrt{-\Delta}}{\varepsilon}t) - \exp(-i\frac{\nu_\varepsilon\sqrt{-\Delta}}{\varepsilon}t)}{\mu^2 - \alpha^2}\right| \leq C\frac{|\sin\left(\frac{\nu_\varepsilon\sqrt{-\Delta}}{\varepsilon}t\right)|}{\sqrt{-\Delta}} \leq C\frac{\nu_\varepsilon t}{\varepsilon},$$

où la dernière inégalité résulte du fait que $|\sin x| \leq x$ pour tout $x \geq 0$. Puisque $|\mu| \leq C$ et $|\alpha| \leq C$, ceci implique que

$$\left|e^{-tM(\xi)}(a,b)\right| \leq C\exp\big(-\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}(1+\omega)t\big)\big(1 + \frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}t\big)\big(|a| + |b|\big),$$

d'où finalement

$$\left|e^{-tM(\xi)}(a,b)\right| \leq C\exp(-\frac{\nu_\varepsilon}{2\varepsilon}(1+\omega)t)\big(|a| + |b|\big). \tag{7.28}$$

• $\Delta \leq -1$.
Dans ce cas, on a

$$|\mu^2 - \alpha^2| = 2\sqrt{\Delta^2 - \Delta} \geq 2|\Delta| \geq C\mu^2,$$

alors que $|\alpha| = \sqrt{1 - \Delta} = \mu$. On en déduit que

$$\left|e^{-tM(\xi)}(a,b)\right| \leq C\exp\big(-\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}(1+\omega)t\big)\big(|a| + |b|\big). \tag{7.29}$$

Second cas $|\xi|^2 \leq 3\nu_\varepsilon^2/8$.
On vérifie que $\mu^2 \leq 3(2 + c\kappa_\varepsilon^2)/8$, donc $1/8 \leq \Delta \leq 1$ pour ε suffisamment petit. De plus,

$$C^{-1} \leq |\mu^2 - \alpha^2| \leq C, \quad \alpha \leq C, \quad \mu \leq C \quad \text{et} \quad \mu \leq C\frac{|\xi|}{\nu_\varepsilon}.$$

En outre,

$$\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}(-1 + \sqrt{\Delta}) = -\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}\frac{1 - \Delta}{1 + \sqrt{\Delta}} = -\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}\frac{\mu^2}{1 + \sqrt{\Delta}} \leq -C\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}\mu^2,$$

donc d'après (7.26)

$$\left|e^{-tM(\xi)}(a,b)\right| \leq C\exp\big(-\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}(1+\omega)t\big)\big(|a|+|b|\big) + C\exp(-\frac{\nu_\varepsilon\omega}{\varepsilon}t)\exp(-\frac{C\nu_\varepsilon\mu^2}{\varepsilon}t)\big(\frac{|\xi|}{\nu_\varepsilon}|a|+|b|\big).$$

Puisque

$$C\frac{|\xi|^2}{\nu_\varepsilon^2} \geq \mu^2 = \frac{|\xi|^2}{\nu_\varepsilon^2}(2+\omega) \geq \frac{|\xi|^2}{\nu_\varepsilon^2},$$

on obtient finalement

$$\left|e^{-tM(\xi)}(a,b)\right| \leq C\exp(-\frac{\nu_\varepsilon\omega}{\varepsilon}t)\Big[\exp(-\frac{\nu_\varepsilon}{\varepsilon}t) + \exp(-\frac{C|\xi|^2}{\nu_\varepsilon\varepsilon}t)\Big]\big(\frac{|\xi|}{\nu_\varepsilon}|a| + |b|\big). \tag{7.30}$$

La conclusion du Lemme 7.2 est finalement obtenue en regroupant les estimations (7.27) à (7.30) et en choisissant $r = \sqrt{3/8}$. □

Bibliographie

Bibliographie pour la partie I

[1] L. Ambrosio, *Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields*, Invent. Math. **158** (2004), no. 2, 227-260.

[2] L. Ambrosio et G. Crippa, *Existence, uniqueness, stability and differential properties of the flow associated to weakly differentiable vector fields*, Proc. of the school Multi-D hyperbolic conservation laws in Bologna, 2005.

[3] H. Aref, *Motion of three vortices*, Phys. Fluids 22 (3), 1979.

[4] T. F. Buttke, *A fast adaptive vortex method for patches of constant vorticity in two dimensions*, J. Comput. Phys. **89** (1990), no. 1, 161-186.

[5] A. Capella, C. Melcher et F. Otto, *Wave-type dynamics in ferromagnetic thin films and the motion of Néel walls*, Nonlinearity **20** (2007), 2519-2537.

[6] J. Y. Chemin, *Fluides parfaits incompressibles*, Astérisque **230** (1995).

[7] R. J. DiPerna et A. Majda, *Concentrations in regularizations for* 2*-D incompressible flow*, Comm. Pure Appl. Math. **40** (1987), no. 3, 301-345.

[8] R. J. DiPerna et A. Majda, *Oscillations and concentrations in weak solutions of the incompressible fluid equations*, Comm. Math. Phys. **108** (1987), no. 4, 667-689.

[9] R. J. DiPerna et A. Majda, *Reduced Hausdorff dimension and concentration-cancellation for two-dimensional incompressible flow*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), no. 1, 59-95.

[10] J. M. Delort, *Existence de nappes de tourbillon en dimension deux*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), no. 3, 553-586.

[11] B. Desjardins, *A few remarks on ordinary differential equations*, Commun. in Part. Diff. Eq. **21 :11** (1996), 1667-1703.

[12] R. J. DiPerna et P. L. Lions, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math. **98** (1989), 511-547.

[13] M.C. Lopes Filho et H. J. Nussenzveig Lopes, *An extension of C. Marchioro's bound on the growth of a vortex patch to flows with L^p vorticity*, SIAM J. Math. Anal. , **29** (1998), 596-599.

[14] D. Gilbarg et N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* (1998), Springer, Berlin.

[15] W. Gröbli, *Specielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden* (1877), Thèse, Zürich : Zürcher und Furrer.

[16] A. Hernandez-Garduno et E. A. Lacomba, *Collisions and regularization for the 3-vortex problem*, J. Math. Fluid Mech. **9** (2007), no. 1, 75-86.

[17] A. Hernandez-Garduno et E. A. Lacomba,*Collisions of Four Point Vortices in the Plane*, preprint Arxiv (2006).

[18] D. Iftimie, M. C. Lopes Filho et H. J. Nussenzveig Lopes, *Two Dimensional Incompressible Ideal Flow Around a Small Obstacle*, Comm. Partial Diff. Eqns. **28** (2003), no. 1&2, 349-379.

[19] D. Iftimie, M. C. Lopes Filho et H. J. Nussenzveig Lopes, *Confinement of vorticity in two dimensional ideal incompressible exterior flow*, Quarterly for Applied Mathematics **65** (2007), no. 3, 499-521.

[20] D. Iftimie, T. Sideris et P. Gamblin, *On the evolution of compactly supported planar vorticity*, Comm. Partial Diff. Eqns. **24** (1999), no. 9-10, 1709-1730.

[21] C. Lacave et E. Miot, *Uniqueness for the vortex-wave system when the vorticity is initially constant near the point vortex*, SIAM J. Math Analysis, à paraître.

[22] C. De Lellis, *Ordinary Differential Equations with rough coefficients and the renormalization Theorem of Ambrosio*, d'après Ambrosio, DiPerna, Lions, Séminaire Bourbaki, 59ième année (2006-2007), no. 972.

[23] A. J. Majda et A. L. Bertozzi, *Vorticity and Incompressible flow*, Cambridge Texts in Applied Mathematics (2002).

[24] A. J. Majda, *Remarks on weak solutions for vortex sheets with a distinguished sign*, Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), 921-939.

[25] C. Marchioro, *On the Euler equations with a singular external velocity field*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **84** (1990), 61-69.

[26] C. Marchioro, *Bounds on the growth of the support of a vortex patch*, Comm. Math. Phys. **164** (1994), 507-524.

[27] C. Marchioro, *On the growth of the vorticity support for an incompressible nonviscous fluid in a two-dimensional exterior domain*, Math. Methods Appl. Sci. **19** (1996), no. 1, 53-62.

[28] C. Marchioro et M. Pulvirenti, *On the vortex-wave system*, Mechanics, analysis, and geometry : 200 years after Lagrange, M. Francaviglia (ed), Elsevier Science, Amsterdam (1991).

[29] C. Marchioro et M. Pulvirenti, *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*, Springer-Verlag (1991).

[30] C. Marchioro et M. Pulvirenti, *Vortices and Localization in Euler Flows*, Commun. Math. Phy. **154** (1993), 49-61.

[31] P.K. Newton, *The N-Vortex problem, analytical techniques*, Springer (2001).

[32] F. Poupaud, *Diagonal defect measures, adhesion dynamics and Euler equation*, Methods and Appl. of Analysis **9** (2002), no 4, 533-562.

[33] S. Schochet, *The weak vorticity formulation of the 2-D Euler equations and concentration-cancellation*, Comm. in PDE **20** (1995), 1077-1104.

[34] S. Schochet, *The point-vortex method for periodic weak solutions of the 2-D Euler equations*, Comm. Pure Appl. Math. **49** (1996), no. 9, 911-965.

[35] P. Serfati, *Borne en temps des caractéristiques de l'équation d'Euler 2D à tourbillon positif et localisation pour le modèle point-vortex*, preprint.

[36] V. N. Starovoitov, *Representation of a solution to the problem of evolution of a point vortex in an ideal fluid*, Siberian Mathematical Journal **35** (1994), no. 2.

[37] V. N. Starovoitov, *Uniqueness of a solution to the problem of evolution of a point vortex*, Siberian Mathematical Journal **35** (1994), no. 3.

[38] R. Temam, *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North-Holland, Amsterdam (1979).

[39] B. Turkington, *On the evolution of a concentrated vortex in an ideal fluid*, Arch. Rational Mech. Anal. **97** (1987), no. 1, 75-87.

[40] I. Vecchi et S. Wu, *On L^1 vorticity for 2D incompressible flow*, Manuscripta Math. **78** (1993), 403-412.

[41] V. I. Yudovich, *Non-stationary flows of an ideal incompressible fluid*, Zh Vych Mat **3** (1963), 1032-1066.

Bibliographie pour la partie II

[42] L. Almeida, *Threshold transition energies for Ginzburg-Landau functionals*, Nonlinearity **12** (1999), 1389-1414.

[43] I. S. Aranson et L. Kramer, *The world of the complex Ginzburg-Landau equation*, Rev. Mod. Phys. **74** (2002), 99-143.

[44] F. Bethuel et D. Smets, *A remark an the Cauchy Problem for the 2D Gross-Pitaevskii equation with non zero degree at infinity*, Differential Integral Equations **20** (2007), 325-338.

[45] F. Bethuel, H. Brezis et F. Hélein, *Ginzburg-Landau vortices*, Birkhäuser, Boston, 1994.

[46] F. Bethuel, R. Danchin et D. Smets, *On the linear wave regime of the Gross-Pitaevskii equation*, J. Anal. Math. (2009), in press.

[47] H. Brezis, J. M. Coron et E. Lieb, *Harmonic maps with defects*, Comm. Math. Phys., **107** (1986), 649-705.

[48] F. Bethuel, R. L. Jerrard et D. Smets, *On the NLS dynamics for infinite energy vortex configurations on the plane*, Rev. Mat. Iberoamericana **24** (2008), 671-702.

[49] F. Bethuel, G. Orlandi et D. Smets, *Collisions and phase-vortex interactions in dissipative Ginzburg-Landau dynamics*, Duke Math. J. **130** (2005), 523-614.

[50] F. Bethuel, G. Orlandi et D. Smets, *Dynamics of multiple degree Ginzburg-Landau vortices*, Comm. Math. Phys. **272** (2007), 229-261.

[51] D. Chiron, *Three long wave asymptotic regimes for the nonlinear-Schrödinger equation* (survey), Singularities in Nonlinear Evolution Phenomena and Applications, M. Novaga & G. Orlandi Editors, CRM Series, SNS Pisa (2009), p. 107-138.

[52] J. E. Colliander et R. L. Jerrard, *Vortex dynamics for the Ginzburg-Landau-Schrödinger equation*, Internat. Math. Res. Notices **7** (1998), 333-358.

[53] J. E. Colliander et R. L. Jerrard, *Ginzburg-Landau vortices : weak stability and Schrödinger equation dynamics*, J. Anal. Math. **77** (1999), 129-205.

[54] C. Gallo, *The Cauchy problem for defocusing nonlinear Schrödinger equations with non-vanishing initial data at infinity*, Comm. Partial Differential Equations **33** (2008), no. 4-6, 729-771.

[55] P. Gérard, *The Cauchy problem for the Gross-Pitaevskii equation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **23** (2006), no. 5, 765-779.

[56] J. Ginibre et G. Velo, *The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation. I. Compactness methods*, Phys. D 95 (1996), no. 3-4, 191-228.

[57] J. Ginibre et G. Velo, *The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation. II. Contraction methods*, Comm. Math. Phys. **187** (1997), no.1, 45-79.

[58] J. Ginibre et G. Velo, *Le problème de Cauchy dans des espaces locaux pour l'équation de Ginzburg-Landau complexe*, Séminaire des Equations aux Dérivées Partielles, Ecole Polytechnique, Palaiseau, (1996) exp. no. XII.

[59] R. L. Jerrard, *Vortex dynamics for the Ginzburg-Landau wave equation*, Calc. Var. Partial Differential Equations **9** (1999), no.1, 1-30.

[60] R. L. Jerrard et H. M. Soner, *Dynamics of Ginzburg-Landau vortices*, Arch. Rat. Mech. Anal. **142** (1998), 99-125.

[61] R. L. Jerrard et H. M. Soner, *The Jacobian and the Ginzburg-Landau energy,* Calc. Var. PDE **14** (2002), 141-191.

[62] R. L. Jerrard et D. Spirn, *Refined Jacobian estimates for Ginzburg-Landau functionals*, Indiana Univ. Math. Jour. **56** (2007), 135-186.

[63] R. L. Jerrard et D. Spirn, *Refined Jacobian estimates and Gross-Pitaevsky vortex dynamics*, Arch. Rat. Mech. Anal., à paraître.

[64] M. Kurzke, C. Melcher, R. Moser et D. Spirn, *Dynamics of Ginzburg-Landau vortices in a mixed flow*, Indiana Univ. Math. Jour. , à paraître.

[65] M. Kurzke et D. Spirn, *Gamma stability and vortex motion in type II superconductors*, preprint.

[66] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov et N. N. Uralceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, American Mathematical Society, Providence, R.I. (1967), vol. 23.

[67] F. H. Lin, *Some dynamical properties of Ginzburg-Landau vortices*, Comm. Pure Appl. Math. **49** (1996), 323-359.

[68] F. H. Lin et J. X. Xin, *On the incompressible fluid limit and the vortex motion law of the nonlinear Schrödinger equation*, Comm. Math. Phys. **200** (1999), 249-274.

[69] E. Madelung, *Quantentheorie in hydrodynamischer Form*, Zeit. F. Phys. **40** (1927), 322-326.

[70] E. Miot, *Dynamics of vortices for the complex Ginzburg-Landau equation*, Analysis and PDE, à paraître.

[71] E. Miot, *Damped wave-like dynamics for the complex Ginzburg-Landau equation*, en préparation.

[72] J. C. Neu, *Vortices in complex scalar fields*, Phys. D **43** (1990), no. 2-3, 385-406.

[73] J. Simon, *Compact sets in* $L^p(0,T;B)$, Annali Mat. Pura appl. (IV), vol CXLVI (1987), 65-96.

[74] E. Sandier et S. Serfaty, *A product-estimate for Ginzburg-Landau and corollaries*, J. of Funct. An. **211** (2004), 219-244.

[75] S. Serfaty, *Vortex collisions and energy-dissipation rates in the Ginzburg-Landau heat flow, part I : Study of the perturbed Ginzburg-Landau equation*, Journal Eur. Math Society **9** (2007), no 2, 177-217.

[76] S. Serfaty, *Vortex collisions and energy-dissipation rates in the Ginzburg-Landau heat flow, part II : The dynamics*, Journal Eur. Math Society **9** (2007), no. 3, 383-426.

Résumé

Les problèmes étudiés dans cette thèse ont trait à la dynamique des points vortex dans des équations pour les fluides ou superfluides bidimensionnels.

La première partie est consacrée à l'équation d'Euler incompressible. Nous y analysons le système mixte Euler-points vortex, introduit par Marchioro et Pulvirenti, dans lequel la vorticité se compose d'une superposition de vortex et d'une partie plus régulière. Nous examinons au préalable le lien entre les points de vue lagrangien et eulérien. Nous étudions ensuite l'unicité, puis l'expansion en temps grand du support de la vorticité. Nous abordons enfin la question de l'existence pour des vorticités moins régulières.

Dans la seconde partie de la thèse, nous nous focalisons sur une équation de Ginzburg-Landau complexe obtenue en ajoutant un terme de dissipation à l'équation de Gross-Pitaevskii. Après avoir examiné le problème de Cauchy dans l'espace d'énergie correspondant, nous étudions la dynamique des points vortex dans le cadre de données très bien préparées. Dans un dernier temps, nous considérons un régime asymptotique sans vortex dans lequel les solutions sont des perturbations de champs constants de module égal à un. Une dynamique de type ondes amorties pour la perturbation est mise en évidence.

Mots-clés: Dynamique des points vortex ; Fluides incompressibles ; Équation d'Euler ; Loi de Biot-Savart ; Équations de transport ; Superfluides ; Équation de Ginzburg-Landau complexe ; Limite singulière ; Énergie de Ginzburg-Landau ; Équation des ondes amorties.

Abstract

In this dissertation, we study some problems arising from vortex dynamics in equations for two-dimensional fluids or superfluids.

The first part is devoted to the incompressible Euler equations. We analyze the so-called Vortex-Wave system, introduced by Marchioro and Pulvirenti, in which the vorticity is given by the superposition of point vortices and of a smoother part. We first examine the link between the lagrangian and eulerian points of view. We then tackle the question of uniqueness. We also study the large time behavior of the support of the vorticity. Finally, we address the problem of existence for more singular vorticities.

In the second part of the thesis, we focus on a complex Ginzburg-Landau equation that has the form of a Gross-Pitaevskii equation with some dissipation added. We first study the Cauchy problem in the corresponding energy space. We then turn to the study of vortex dynamics for very well prepared data. At last, we consider another asymptotic regime without vortices for perturbations of the vacuum. We show that the perturbation essentially behaves according to a damped wave-like equation.

Keywords: Vortex dynamics ; Incompressible fluids ; Biot-Savart law ; Euler equations ; Transport equations ; Superfluids ; Complex Ginzburg-Landau equation ; Singular limit ; Ginzburg-Landau energy ; Damped wave equation.